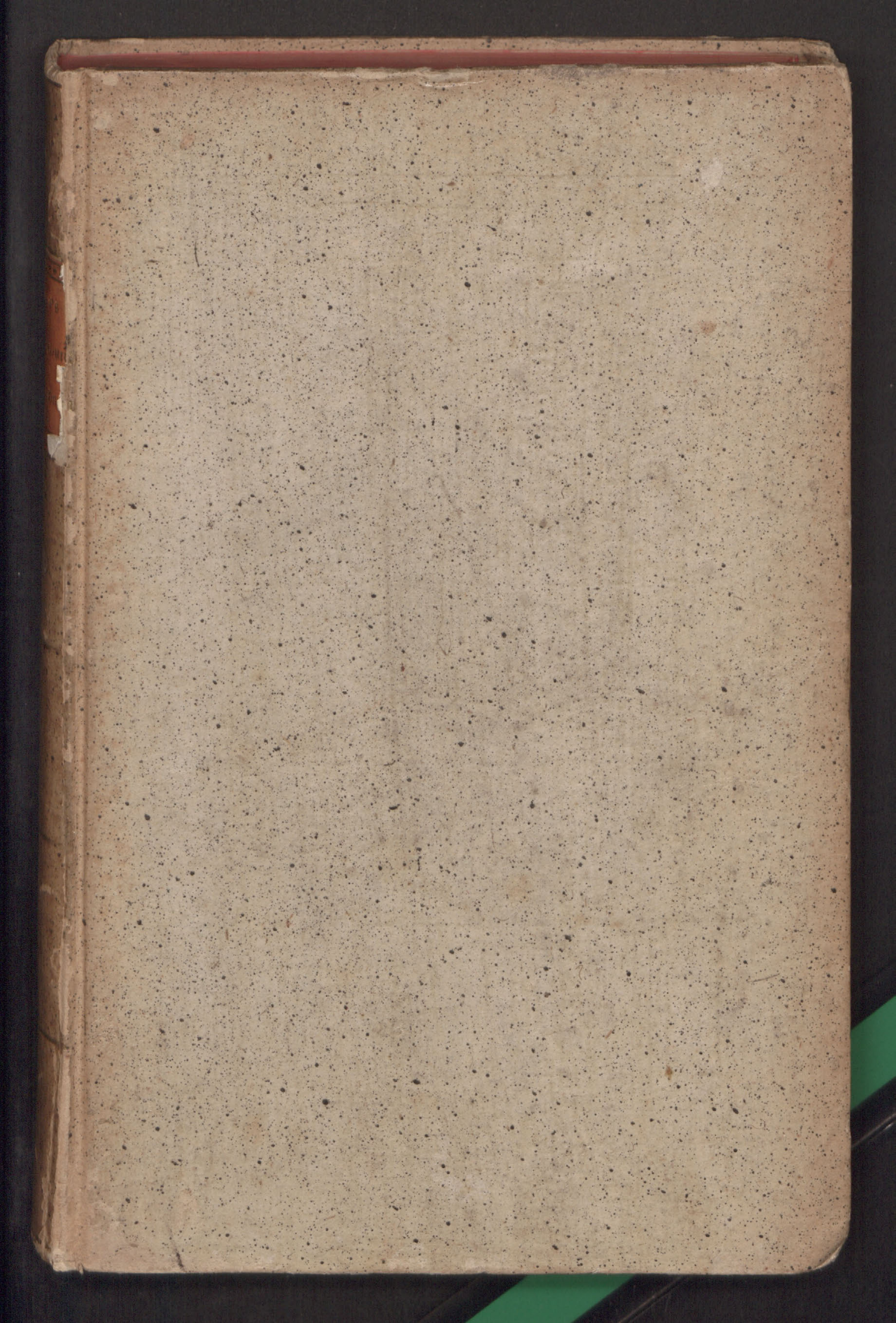
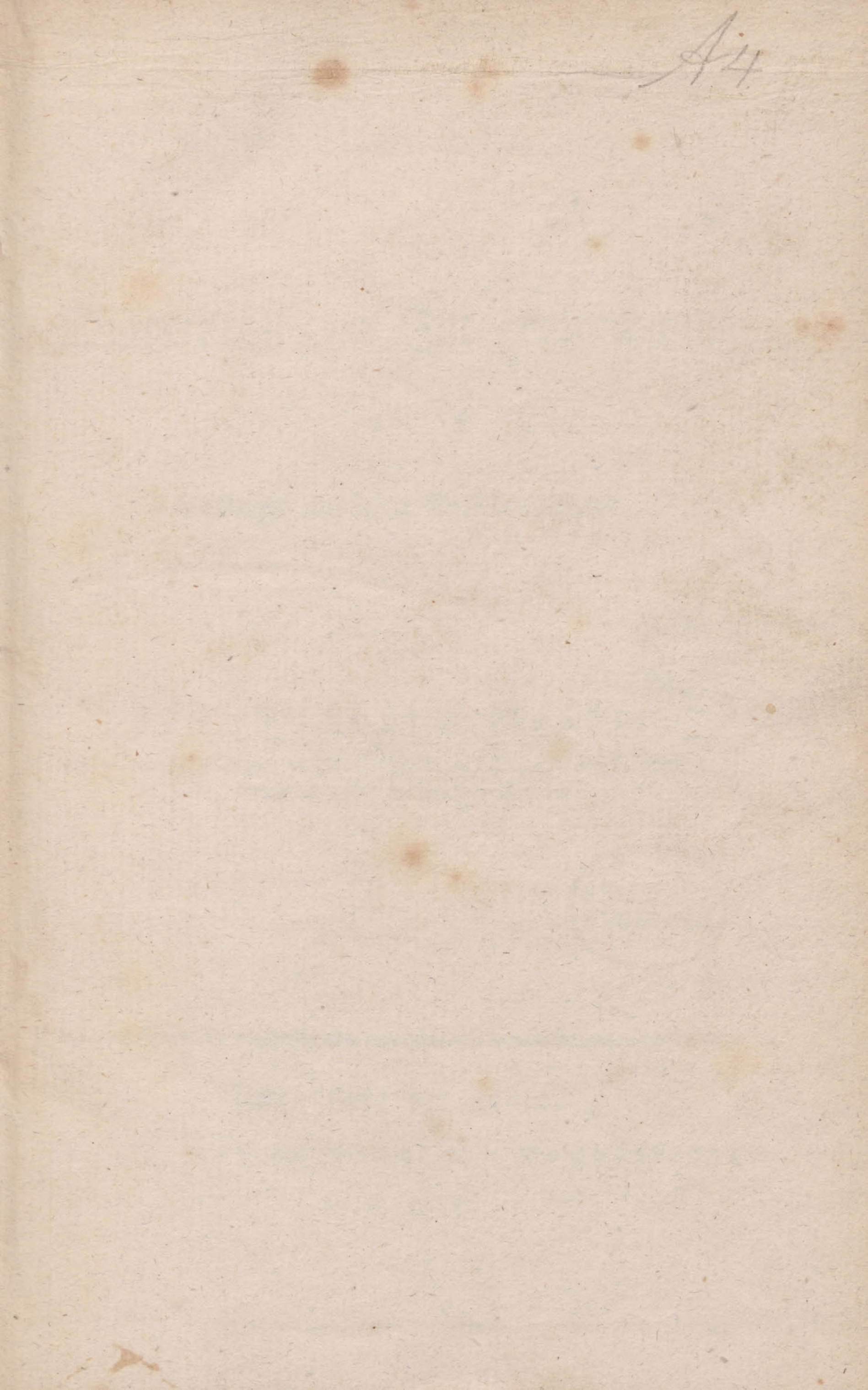
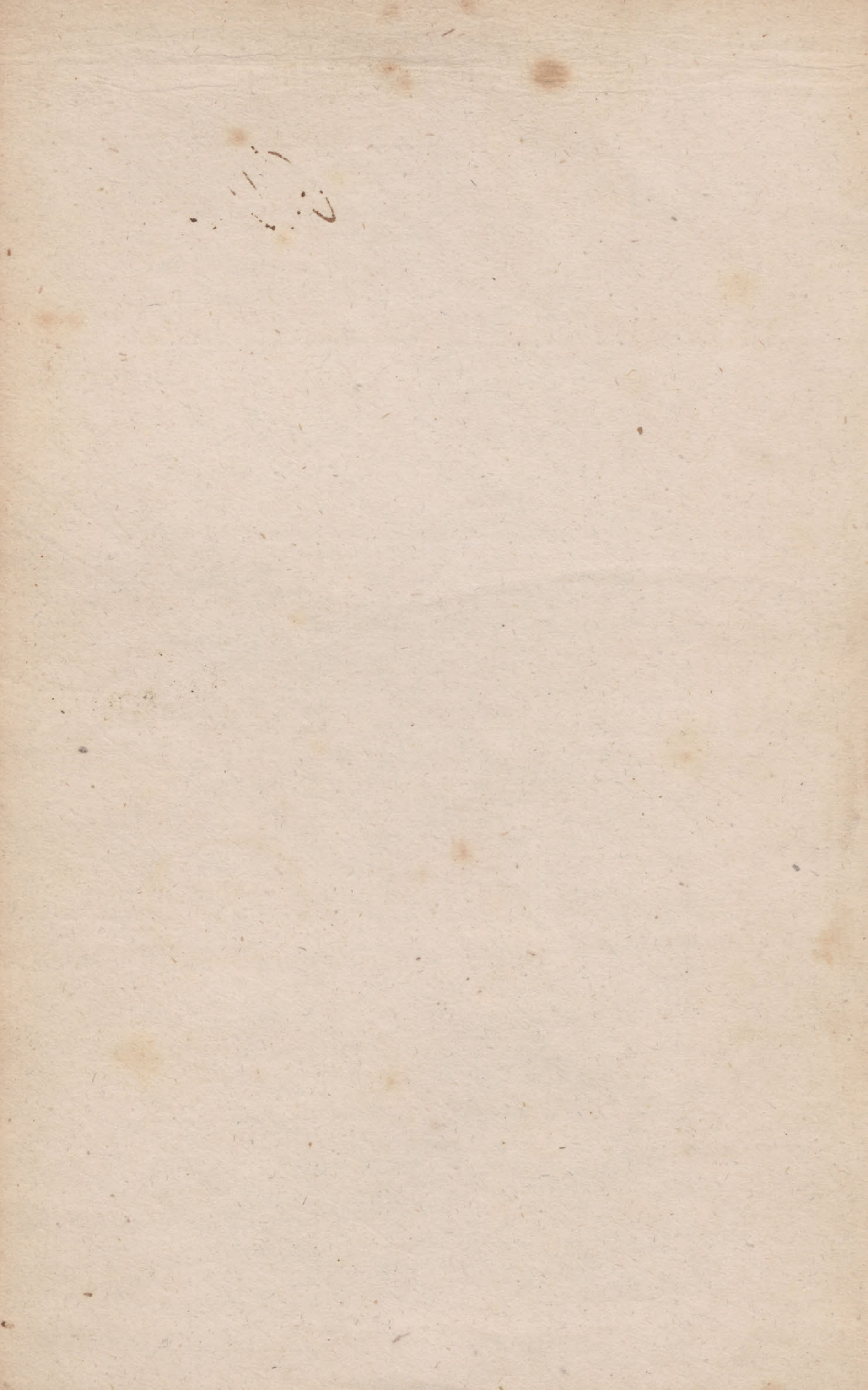


Q.Q.c.





Leichtfaßliche Anleitung

zur

Differential- und Integralrechnung

für

Anfänger und zum Selbstunterricht

von

Joh. Heinrich Müller,

Lehrer an der Musterschule in Frankfurt a. M. und Mitgliede des Frankfurtischen Gelehrtenvereins für deutsche Sprache.



Frankfurt am Main,

Verlag der Hermannschen Buchhandlung

1826.



Seinen sehr verehrten Freunden,

dem Herrn

Dr. S. H. A. Herling,

Professor am Gymnasium zu Frankfurt a. M. und Mitgliede des Frankfurtischen Gelehrtenvereins für deutsche Sprache,

dem Herrn

Johann Ludwig Seelbach,

Direktor des Gymnasiums zu Elberfeld,

dem Herrn

Dr. Ludwig Thilo,

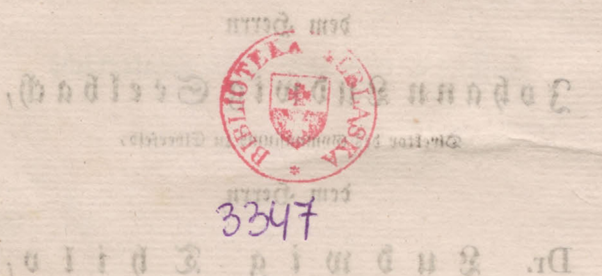
Professor am Gymnasium zu Frankfurt a. M. und Mitgliede des Frankfurtischen Gelehrtenvereins für deutsche Sprache,

widmet dieses Werkchen

aus

Hochachtung und Liebe

der Verfasser.


BIBLIOTEKA ŚLĄSKA


BIBLIOTEKA
UNIWERSYTECKA
W TORUNIU

Vorwort.

Es scheint mir nicht unzweckmäßig, daß ich hier kurz die Haupterfordernisse angebe, die meines Erachtens ein Lehrbuch der Infinitesimalrechnung für Anfänger und zum Selbstunterrichte haben muß. Durch diese Angabe wird der Gesichtspunkt festgestellt, aus welchem ich mein Werkchen betrachtet zu sehen wünsche.

1. Die Grundlehren müssen sich unmittelbar und ungezwungen an die Lehren der Analysis endlicher Größen anschließen. Sie müssen so dargestellt werden können, daß sie auch dem Anfänger, der die nöthigen Vorkenntnisse hat, vollkommen deutlich sind. Die Lagrange'sche Begründungsart der Differentialrechnung scheint mir diese Vortheile zu gewähren, und ich habe sie daher in meinem Werkchen gewählt.

2. Oft müssen allgemeine Sätze durch vorläufige, die darin enthaltenen Vorstellungen fixirende, specielle Fälle eingeleitet werden. Insbesondere ist es bei den Beweisen bisweilen nöthig, daß man sich vom Besondern zum Allgemeinen erhebe. Ich verwahre mich hierbei aber ausdrücklich gegen die Meinung, als wolle

ich den unvollständigen Induktionen in der Mathematik das Wort reden. Der Beweis muß, wenn man vom Besondern zum Allgemeinen aufsteigt, jedesmal so weit fortgeführt werden, bis der allmälich sich erweiternde Blick denselben nach seiner ganzen Allgemeinheit übersieht. Bisweilen muß auch dem Allgemeinen ein Besonderes Schritt vor Schritt parallel laufen.

3. Die ganze Kette von Vorstellungen muß leicht von ihrem Anfange bis zu ihrem Ende übersehen werden können. Alle Sätze also, welche nicht Fundamentallehren oder für den Zusammenhang und die Deutlichkeit wesentliche Vorstellungen enthalten, müssen, so interessant sie auch an sich seyn mögen, ausgeschlossen bleiben. Der ganze Vortrag muß kurz seyn, versteht sich jedoch, ohne die Gesetze der Bestimmtheit und Deutlichkeit zu verletzen.

Ob diese Ansichten richtig sind und mein Werkchen denselben gemäß abgefaßt ist, das zu beurtheilen überlasse ich Männern, welche nicht bloß Mathematiker sind, sondern auch Lehrer, die bei allem Unterrichte sich erinnern, daß sie Schüler waren, und die sich auf den Standpunkt und in die Lage der Anfänger, welche sich selbst unterrichten wollen, zu versetzen wissen.

Frankfurt a. M. den 18. April 1826.

Der Verfasser.

Inhalt.

Erste Abtheilung.

Die Differentialrechnung.

Erster Abschnitt.

Einleitung in die Differentialrechnung.

Erstes Kapitel.

Zweites Kapitel.

Zweiter Abschnitt.

Die Differentialrechnung.

Erstes Kapitel.

Zweites Kapitel.

Drittes Kapitel.

Viertes Kapitel.

Fünftes Kapitel.

Sechstes Kapitel.

Siebentes Kapitel.

Zweite Abtheilung.

Die Integralrechnung.

Erstes Kapitel.

Zweites Kapitel.

Drittes Kapitel.

Viertes Kapitel.

Fünftes Kapitel.

Sechstes Kapitel.

Erste Abtheilung.

Die

Differentialrechnung.

Erster Abschnitt.

Einleitung in die Differentialrechnung.

Erstes Kapitel.

Hauptarten der Funktionen.

§. 1. Erkl. Eine Größe heißt unveränderlich (beständig), wenn sie den Werth, den man ihr einmal beigelegt hat, behält; sie heißt veränderlich, wenn ihr jeder beliebige Werth zukommt.

Gewöhnlich werden die unveränderlichen Größen durch die ersten, und die veränderlichen durch die letzten Buchstaben des lateinischen Alphabets bezeichnet.

§. 2. Erkl. Eine Funktion veränderlicher Größen heißt jeder Größenausdruck, der auf irgend eine Art aus diesen veränderlichen und aus beständigen Größen zusammengesetzt ist. Ist z. B. $y = a + bx$, u. $z = ax + by + cxy$, so ist im ersten Fall y oder $a + bx$ eine Funktion von x, und im zweiten z oder $ax + by + cxy$ eine Funktion von x u. y.

§. 3. So wie sich die veränderlichen Größen in einer Funktion verändern, so verändert sich die Funktion selbst. Eine Funktion ist also selbst eine veränderliche Größe und ihr Werth hängt von den Werthen ab, die man den veränderlichen Grössen in ihr gibt.

Es sey z. B. $y = x^2 + 7$,

so ist für $x = 1,\ y = 8$

$= 2,\ = 11$

$= 3,\ = 16$

. .

. .

. .

§. 4. Wenn y eine Funktion von x ist, so ist auch umgekehrt x eine Funktion von y.

Ist z. B. $y = a + bx$, so ist auch $x = \frac{y - a}{b}$.

§. 5. In einer Gleichung zwischen mehreren veränderlichen Größen ist jede der letztern eine Funktion der übrigen.

Es sey z. B. $z = ax + by + cxy$, so ist auch $x = \frac{z - by}{a + cy}$, u. $y = \frac{z - ax}{b + cx}$.

§. 6. Erkl. Eine Funktion heißt algebraisch, wenn sie sich durch eine Gleichung von einem bestimmten Grade darstellen läßt. Algebraisch sind z. B. die Funktionen $y = \pm \sqrt{(ax - x^2)}$ u. $y^2 = ax - x^2$. Eine Funktion heißt transcendent, wenn die Ausdrückung derselben durch die Größe, von welcher sie eine Funktion ist, immer eine Gleichung von unzählig vielen Abmessungen verlangt. Ein Sinus z. B. kann durch seinen Bogen und ein Logarithme durch seine Zahl nur vermittelst einer Gleichung von unzählig vielen Abmessungen dargestellt werden. Ein Sinus ist also eine transcendente Funktion von seinem Bogen, und ein Logarithme von seiner Zahl.

§. 7. Erkl. Eine algebraische Funktion ist entweder rational, oder irrational. Sie ist rational, wenn die veränderliche Größe unter keinem Wurzelzeichen vorkommt; und irrational, wenn sie sich unter einem solchen befindet. Rational ist z. B. die Funktion $y = ax - x^2$, und irrational die Funktion $y = a + \sqrt{(ax - x^2)}$.

§. 8. Erkl. Eine algebraische Funktion ist gebrochen oder ganz, je nachdem die veränderliche Größe als Divisor vorkommt, oder nicht. Gebrochen ist z. B. die Funktion $\frac{a + bx}{Ax + Bx^2 + Cx^3}$, und ganz die Funktion $ax - x^2$.

§. 9. Erkl. Eine algebraische Funktion X von x heißt gesondert, wenn sie durch eine reine, und ungesondert, wenn sie durch eine unreine Gleichung gegeben ist. Die Funk-

tion $X^2 = ax - x^2$ ist gesondert, und die Funktionen $X^2 = axX - x^2$, u. $X^3 = ax^2X^2 + bxX - cx^3$ sind ungesondert.

§. 10. Erkl. Eine Funktion heißt einförmig, wenn sie für jeden Werth der veränderlichen Größe in ihr nur einen, und vielförmig, wenn sie für jeden solchen Werth mehrere Werthe erhält. Die Funktion $y = ax - x^2$ ist einförmig, und die Funktion $y = \pm \sqrt{(ax - x^2)}$ vielförmig, bestimmter, zweiförmig.

§. 11. Erkl. Eine Funktion läßt sich oft auf verschiedene Weisen darstellen. Die Funktion $(1 + x)^3$ z. B. kann auch unter der Form $1 + 3x + 3x^2 + x^3$ dargestellt werden. Die Darstellung einer Funktion unter einer andern, als der Form, unter welcher sie gegeben ist, heißt die Verwandlung derselben.

Zweites Kapitel.

Verwandlung der Funktionen in Reihen.

§. 12. Erkl. Eine Reihe ist eine Menge zusammengehöriger Größen (Glieder der Reihe), deren jede nach einem, allen diesen Größen gemeinschaftlichen, Gesetze (dem allgemeinen Gliede der Reihe) bestimmt wird. Eine Reihe ist z. B. $\frac{x^0}{a} - \frac{x^1}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \frac{x^3}{a^4} + \ldots \pm \frac{x^m}{a^{m+1}}$. Ihr allgemeines Glied ist $\pm \frac{x^m}{a^{m+1}}$.

§. 13. Ist das allgemeine Glied einer Reihe bekannt, so läßt sich dieselbe so weit fortsetzen, als verlangt wird.

§. 14. Erkl. Eine Reihe heißt divergent, oder convergent, je nachdem ihre Glieder immer größer, oder immer kleiner werden. Die Reihe $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots$ ist divergent, und die Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$ convergent.

§. 15. Erkl. Eine Reihe, die nach den Potenzen einer Größe geordnet ist, heißt steigend, oder fallend, je nachdem die Exponenten der Potenzen zu- oder abnehmen. Stei-

gend ist die Reihe $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$, fallend die Reihe $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + \ldots$

§. 16. Erkl. Eine Reihe heißt endlich, wenn sie abbricht, und unendlich, wenn sie nicht abbricht.

I. Verwandlung algebraischer Funktionen in Reihen.

A. Ueber die Verwandlung rationaler, gebrochener algebraischer Funktionen von Einer veränderlichen Größe in Reihen durch die Division.

§. 17. Aufg. Man soll den Bruch $\frac{1}{1-x}$ durch fortgesetzte Division in eine Reihe verwandeln.

Aufl. Man dividire nach den bekannten Regeln.

Divisor	Dividend	Quotient
$1 - x$	1	$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$

$$\begin{array}{rl} & 1 - x \\ \hline \text{1ster Rest} & + x \\ & x - x^2 \\ \hline \text{2ter Rest} & + x^2 \\ & x^2 - x^3 \\ \hline \text{3ter Rest} & + x^3 \end{array}$$

u. s. w.

Man hat also

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$$

§. 18. Der für $\frac{1}{1-x}$ gefundene Ausdruck ist also eine Reihe, deren allgemeines Glied $+ x^n$ ist.

So weit aber die Reihe auch fortgesetzt werden mag, so ist sie doch nie genau $= \frac{1}{1-x}$.

Man setze, das letzte der gefundenen Glieder der Reihe sey x^n, so ist der $n + 1$ste Rest x^{n+1}. Also müßte, wenn man den

Werth des $\frac{1}{1-x}$ genau haben wollte, den gefundenen Gliedern der Reihe nach der Bruch $\frac{x^{n+1}}{1-x}$ beigefügt werden.

§. 19. Erkl. Eine Größe, welche einer Reihe, damit diese vollständig werde, noch beigefügt werden muß, heißt der Reihe Ergänzung.

§. 20. Zwei zunächst auf einander folgende Glieder der Reihe sind allgemein x^n, x^{n+1}, und die Reihe ist convergent, wenn

$$x^{n+1} < x^n,$$
$$\text{also } x < 1,$$

und sie ist divergent, wenn

$$x^{n+1} > x^n,$$
$$\text{also } x > 1 \text{ ist.}$$

§. 21. Ist das letzte der gefundenen Glieder x^n, so ist die Ergänzung $\frac{x^{n+1}}{1-x}$, und ist das letzte der gefundenen Glieder x^{n+1}, so ist sie $\frac{x^{n+2}}{1-x}$. Jene Ergänzung verhält sich zu dieser wie $\frac{x^{n+1}}{1-x} : \frac{x^{n+2}}{1-x} = 1 : x$.

Ist also die Reihe convergent, also x ein echter Bruch, so ist $\frac{x^{n+2}}{1-x} < \frac{x^{n+1}}{1-x}$. Je mehr Glieder der Reihe also hier gesucht werden, desto kleiner ist die Ergänzung und desto näher kommt die Summe der Glieder dem Werthe des Bruchs $\frac{1}{1-x}$.

Ist aber die Reihe divergent, also $x > 1$, so ist $\frac{x^{n+2}}{1-x} > \frac{x^{n+1}}{1-x}$. Je mehr Glieder der Reihe also hier gesucht werden, desto größer istdie Ergänzung und desto mehr entfernt sich die Reihe $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ von dem Werthe des Bruchs $\frac{1}{1-x}$.

§. 22. Ist das letzte der gefundenen Glieder x^n, also die Ergänzung $\frac{x^{n+1}}{1-x}$, so verhält sich der vollständige Werth

der Reihe, nämlich $\frac{1}{1-x}$, zu der Ergänzung $\frac{x^{n+1}}{1-x}$ wie $1 : x^{n+1}$.

Ist also die für $\frac{1}{1-x}$ gefundene Reihe convergent und x ein kleiner Bruch, so ist, wenn die Reihe weit fortgesetzt wird, die Ergänzung derselben gegen ihren vollständigen Werth gering und desto geringer, je kleiner x ist und je weiter sie fortgesetzt wird. Ist z. B. $x = \frac{1}{10}$ u. $n = 6$, so verhält sich $\frac{1}{1-x} : \frac{x^{n+1}}{1-x} = 1 : (\frac{1}{10})^6 = 1 : \frac{1}{1000000}$.

Wenn aber die Reihe divergent ist, so ist ihre Ergänzung gegen den vollständigen Werth der Reihe bedeutend und desto bedeutender, je größer x ist und je weiter sie fortgesetzt wird.

§. 23. Erkl. Eine Größe, welche von einer andern wachsenden oder abnehmenden nicht überschritten, oder selbst nicht erreicht werden, der sich aber diese andere, so viel man will, nähern kann, heißt eine Grenze der andern.

Ist die Reihe für $\frac{1}{1-x}$ convergent, so ist $\frac{1}{1-x}$ die Grenze derselben.

§. 24. Wenn x ein kleiner Bruch ist und die Reihe für $\frac{1}{1-x}$ etwas weit fortgesetzt wird, so kann man ihre Ergänzung als unbedeutend vernachlässigen. Bei der divergenten Reihe für $\frac{1}{1-x}$ darf dies aber nicht geschehen.

§. 25. Sowohl für die convergente, als für die divergente Reihe ist das Verhältniß zweier unmittelbar auf einander folgenden Glieder $= x^n : x^{n+1} = 1 : x$. Da nun x so klein oder so groß angenommen werden kann, als man will, so kann man durch gehörige Annahme der Werthe für x bewirken, daß von zwei nächsten Gliedern das folgende gegen das vorhergehende so klein, oder so groß werde, als man will.

§. 26. Man nehme an, x werde immer kleiner und kleiner, oder nähere sich immer fort der Null, dann wird

jedes Glied der Reihe für $\frac{1}{1-x}$ gegen sein nächstvorhergehendes immer kleiner und kleiner und kann in Beziehung auf dasselbe als unbedeutend außer Acht gelassen werden. So ergibt sich also, daß sich die Reihe für $\frac{1}{1-x}$ bei fortwährender Abnahme des x immer mehr ihrem ersten Gliede 1 nähert und daß also dieses Glied, bei der gemachten Voraussetzung, die Grenze der Reihe ist, was auch daraus erhellet, daß bei einer immer fortgehenden Abnahme des x, der Bruch $\frac{1}{1-x}$ immer mehr der Größe 1 nahe kommt.

§. 27. Setzt man für x Zahlen, die dem 1 immer näher kommen, so wird der Unterschied $1-x$ immer kleiner und also der Quotient $\frac{1}{1-x}$ immer größer. Es ist z. B. für

$$x = \tfrac{999}{1000},\ 1-x = \tfrac{1}{1000}\ \text{u.}\ \frac{1}{1-x} = 1 + \tfrac{999}{1000} + (\tfrac{999}{1000})^2 + \ldots$$

$$= \tfrac{9999}{10000},\ 1-x = \tfrac{1}{10000}\ \text{u.}\ \frac{1}{1-x} = 1 + \tfrac{9999}{10000} + (\tfrac{9999}{10000})^2 + \ldots$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$= 1 \qquad = 0, \qquad = 1 + 1 + 1 + \ldots$$

§. 28. Erkl. Eine Größe nimmt unendlich zu oder ab, je nachdem sie, bei ihrer Zu- oder Abnahme, größer oder kleiner werden kann, als jede noch so große oder noch so kleine bestimmte Größe ihrer Art.

Erkl. Wenn eine Größe zu Null wird, so heißt sie verschwindend.

§. 29. Setzt man in

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$$

das $x = \frac{1}{2}$, so erhält man

$$2 = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \ldots$$

Bei dieser Reihe ist merkwürdig, daß jedes Glied derselben gleich der Summe aller folgenden ist.

Hat man also eine Reihe, in welcher jedes folgende Glied weniger, als die Hälfte des nächstvorhergehenden ist, so beträgt jedes Glied mehr, als alle folgenden zusammengenommen, und das, um was ein Glied die Summe der folgenden übertrifft, ist in Vergleich mit diesem Glied desto beträchtlicher, je schneller die Abnahme der Glieder ist.

§. 30. Nehmen in der Reihe

$A + Bx^a + Cx^b + Dx^c + \ldots$

die Exponenten, so wie sie auf einander folgen, zu, so kann x immer so angenommen werden, daß jedes Glied der Reihe weniger, als die Hälfte des nächstvorhergehenden ist. Denn nimmt man auch den ungünstigsten Fall an, der hier vorkommen kann, und welcher alsdann statt hat, wenn in zwei zunächst auf einander folgenden Gliedern Px^p, Qx^q der Coefficient Q von dem Coefficienten P das größte Vielfache ist, so ergibt sich doch, daß man auch hier den Werth für x der Forderung gemäß bestimmen kann. Setzt man nämlich

$$Qx^q < \tfrac{1}{2} \cdot Px^p$$

so findet man

$$x^q < \tfrac{1}{2} \cdot \frac{P}{Q} \cdot x^p$$

$$\frac{x^q}{x^p} < \tfrac{1}{2} \cdot \frac{P}{Q}$$

$$x^{q-p} < \tfrac{1}{2} \cdot \frac{P}{Q}$$

$$x < \sqrt[q-p]{\frac{P}{2Q}}$$

$$< \left(\frac{P}{2Q}\right)^{\frac{1}{p-q}}$$

wo q größer ist, als p.

§. 31. Man sieht wohl, daß man x auch so annehmen kann, daß das Glied Qx^q kleiner wird, als $\frac{1}{n} \cdot Px^p$, wo n eine so große

Zahl bedeuten kann, als man will. Für die Voraussetzung, daß Qx^q kleiner sey, als $\frac{1}{n} . Px^p$, ist

$$x < \left(\frac{P}{nQ}\right)^{\frac{1}{q-p}}$$

Nun ist $Px^p : \frac{1}{n} . Px^p = 1 : \frac{1}{n}$, und n kann so groß angenommen werden, daß $\frac{1}{n}$ gegen 1 so klein wird, als man will. Also kann noch um so viel mehr Qx^q in Vergleichung mit Px^p so klein werden, als man will.

§. 32. Nimmt man nun x so an, daß Qx^q gegen Px^p unbeträchtlich, oder daß von zwei Gliedern das folgende sehr viel weniger als die Hälfte des vorhergehenden ist, so kann die Summe aller auf das erste Glied A folgenden Glieder, als unbedeutend gegen dieses erste Glied außer Acht gelassen werden. Bei dieser Außerachtlassung fehlt man um desto weniger, je kleiner x angenommen wird. Also nähert sich, bei vorausgesetzter immer fortgehender Abnahme des x, die Reihe $A + Bx^a + Cx^b + Dx^c + \ldots$ dem A als ihrer Grenze.

Man kann auch sagen: In der Reihe $A + Bx^a + Cx^b + \ldots$ kann man das x immer so annehmen, daß jedes Glied als unbeträchtlich gegen sein nächstvorhergehendes außer Acht gelassen werden kann. Bei einer immer fortgehenden Abnahme des x nähert sich also die Reihe dem ersten Gliede A als ihrer Grenze.

§. 33. Betrachtet man die Reihe

$$Ax^a + Bx^b + Cx^c + Dx^d + \ldots,$$

in welcher die Exponenten von dem ersten an zunehmen, so ergibt sich sogleich, daß man dieselbe auch so schreiben kann:

$$x^a\,(A + Bx^{b-a} + Cx^{c-a} + Dx^{d-a} + \ldots)$$

Nun nähert sich, unter der Voraussetzung einer fortgehenden Abnahme des x, der eingeklammerte Faktor immer mehr seinem ersten Glied A, und kann demselben beliebig und dergestalt nahe gebracht werden, daß man die auf A folgenden Glieder

vernachlässigen kann. Also nähert sich, wenn man x als immerfort abnehmend annimmt, die Reihe $Ax^a + Bx^b + Cx^c + \ldots$ ihrem ersten Gliede, als ihrer Grenze.

§. 34. Die bisherigen Betrachtungen über die Grenzen betreffen Funktionen, in welcher die Exponenten von x vom ersten an zunehmen. Es sind nun noch, um die Erörterungen über diesen Gegenstand vollständiger zu machen, Auseinandersetzungen hinsichtlich des Falles anzustellen, in welchem die Exponenten von x vom ersten an abnehmen.

§. 35. Die Exponenten in der Funktion

$$Ax^a + Bx^b + Cx^c + \ldots$$

nehmen von dem ersten an ab. Man kann diese Funktion auch so schreiben:

$$x^a . \left(A + \frac{B}{x^{a-b}} + \frac{C}{x^{a-c}} + \ldots\right)$$

Man nehme an, zwei zunächst auf einander folgende Glieder des eingeklammerten Faktors seyen $\frac{P}{x^{a-p}}$, $\frac{Q}{x^{a-q}}$, so verhält sich

$$\frac{P}{x^{a-p}} : \frac{Q}{x^{a-q}} = 1 : \frac{x^{a-p}}{P} . \frac{Q}{x^{a-q}}$$

$$= 1 : \frac{Q}{P . x^{p-q}} = \frac{P}{Q} : \frac{1}{x^{p-q}},$$

wo p größer ist, als q, also $p - q$ bejaht. Nun kann man x so groß annehmen, als man will. Dadurch wird $\frac{1}{x^{p-q}}$ so klein, als man will. Wächst also x immer fort, so kann jedes Glied in dem eingeklammerten Faktor gegen sein nächstvorhergehendes beliebig klein, und in Beziehung auf dasselbe außer Acht gelassen werden. Der eingeklammerte Faktor nähert sich also, unter der gemachten Voraussetzung, immer mehr und mehr seinem ersten Gliede A, als seiner Grenze, folglich die Funktion $Ax^a + Bx^b + Cx^c + \ldots$ ihrem ersten Gliede Ax^a.

§. 35.* Für die Reihe

$$Ax^a + Bx^b + Cx^c + Dx^d + \ldots$$

ergibt sich aus dem bisherigen, für den Fall, daß man nicht alle ihre Glieder zusammenzählen kann oder will, noch folgendes:

1) Wenn die Reihe steigend ist (§. 15.), so darf man, damit sie convergent sey, und ihr Werth näherungsweise gefunden werde, für x nur echte Brüche setzen; je kleinere gesetzt werden, desto convergenter ist die Reihe.

2) Wenn sie aber fallend ist, so dürfen, aus denselben Gründen, für x nur Werthe gesetzt werden, welche die Einheit übersteigen; je größere man setzt, desto mehr nimmt die Reihe an Convergenz zu.

§. 36. Aufg. Man soll $\frac{u^5 - v^5}{u - v}$ durch eine Reihe ausdrücken.

Aufl. Man dividire mit dem Nenner in den Zähler des gegebenen Bruchs u. s. w.

$$
\begin{array}{l|l|l}
u - v & u^5 - v^5 & u^4 + u^3v + u^2v^2 + uv^3 + v^4 \\
 & u^5 - u^4v & \\
\hline
 & + u^4v - v^5 & \\
 & u^4v - u^3v^2 & \\
\hline
 & + u^3v^2 - v^5 & \\
 & u^3v^2 - u^2v^3 & \\
\hline
 & + u^2v^3 - v^5 & \\
 & u^2v^3 - uv^4 & \\
\hline
 & + uv^4 - v^5 & \\
 & + uv^4 - v^5 & \\
\hline
\end{array}
$$

Es ist also $\frac{u^5 - v^5}{u - v} = u^4 + u^3v + u^2v^2 + uv^3 + v^4$.

§. 37. Ist m eine bejahte ganze Zahl, so ist überhaupt

$$\frac{u^m - v^m}{u - v} = u^{m-1} + u^{m-2}v + u^{m-3}v^2 + \ldots + u^2v^{m-3} + uv^{m-2} + v^{m-1}$$

Denn multiplicirt man

$$u^{m-1} + u^{m-2}v + u^{m-3}v^2 + \ldots + u^2v^{m-3} + uv^{m-2} + v^{m-1}$$

mit $u - v$

$$
\begin{array}{l}
\hline
u^m + u^{m-1}v + u^{m-2}v^2 + \ldots + u^3v^{m-3} + u^2v^{m-2} + uv^{m-1} \\
- u^{m-1}v - u^{m-2}v^2 - \ldots\ldots\ldots - u^2v^{m-2} - uv^{m-1} - v^m \\
\hline
\end{array}
$$

so erhält man $u^m - v^m$.

§. 38. **Erkl.** Die Weise, wie eine Reihe nach den Potenzen derjenigen Größe, nach welcher sie geordnet ist, fortschreitet, heißt **die Gestalt der Reihe.**

Lehrs. Wenn man des Bruches $\frac{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\dots}{a+bx+cx^2+dx^3+\dots}$ Zähler durch seinen Nenner dividirt, so erhält man eine Reihe von der Gestalt $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}x+\mathfrak{C}x^2+\mathfrak{D}x^3+\dots$

Bew. Dividirt man

$$a+bx+cx^2+dx^3+\dots \text{ in } (\odot)\ \alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\dots \;\Big|\; \frac{\alpha}{a}+\frac{A}{a}x+\frac{A'}{a}x^2+\dots$$

$$\alpha+\frac{\alpha b}{a}x+\frac{\alpha c}{a}x^2+\frac{\alpha d}{a}x^3+\dots$$

$$(☾)\ Ax+Bx^2+Cx^3+\dots$$

$$Ax+\frac{Ab}{a}x^2+\frac{Ac}{a}x^3+\dots$$

$$(♄)\ A'x^2+B'x^3+\dots$$

$$A'x^2+\frac{A'b}{a}x^3+\dots$$

$$A''x^3+\dots$$

$$\dots\dots$$

so erhält man als ersten Theil des Quotienten $\frac{\alpha}{a}$. Durch Abziehung des Produkts aus diesem ersten Theil und dem Divisor von der Reihe ⊙ erhalte man den Rest ☾. In diesem Rest ist kein Glied, das x auf der 0ten Potenz enthält. Es ist bei der angeführten Subtraktion weggefallen. In dem Rest ☾ folgen die Exponenten der Potenzen von x von 1 an nach der Ordnung der natürlichen Zahlen aufeinander. Dividirt man nun in diesen Rest, so erhält man $\frac{A}{a}x$ als zweites Glied des Quotienten. Was nach der Subtraktion des Produkts aus diesem zweiten Glied und aus dem Divisor übrig bleibt, heiße ♄. In diesem Rest ist kein Glied, das x von der ersten Potenz enthält. Die Exponenten der Potenzen von x in dem Reste ♄ folgen von 2 an nach der Ordnung der natürlichen Zahlen auf einander. — Man sieht wohl, daß wenn man weiter dividirt, man als drittes ein Glied in den Quo-

tienten bekommt, das x auf der zweiten Potenz enthält; daß der Rest, welcher bleibt, wenn man das Produkt aus diesem Glied und dem Divisor von z abzieht, kein Glied hat, welches x auf der zweiten Potenz enthält, und daß die übrigen Glieder des Restes nach den Potenzen x^3, x^4, x^5, . . . fortschreiten. — Man sieht überhaupt, daß der Quotient, den man durch die Division erhält, eine Reihe von der Gestalt $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$ ist.

B. Verwandlung algebraischer Funktionen von Einer veränderlichen Größe in Reihen durch die Methode der unbestimmten Coefficienten.

§. 39. Erkl. Zwei Funktionen

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots$$
$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$$

heißen identisch, wenn sie nicht allein einander gleich sind, sondern auch, nachdem man sie nach einer und derselben veränderlichen Größe geordnet hat, in einerlei Gliedern einerlei Potenzen von dieser veränderlichen Größe enthalten.

§. 40. Lehrs. Die Coefficienten, die zu einerlei Potenz in identischen Funktionen gehören, sind gleich.

Bew. Es sey

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$$

Die Gleichheit dieser beiden Funktionen muß für jeden Werth des x, also auch für $x = 0$ statt finden. Nimmt man nun an, es sey $x = 0$, so fallen alle Glieder, die auf beiden Seiten der Gleichung x enthalten, weg, und es bleibt also $a = A$. Ist aber $a = A$, so muß auch für jeden Werth des x,

$$bx + cx^2 + dx^3 + \ldots = Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$$

seyn. Man dividire auf beiden Seiten dieser Gleichung durch x. Hierdurch bekommt man

$$b + cx + dx^2 + \ldots = B + Cx + Dx^2 + \ldots$$

Da nun diese Gleichung wieder für jeden Werth des x, also auch für $x = 0$, gelten muß, so ergibt sich nach den vorigen Schlüssen, daß auch $b = B$ seyn muß.

§. 41. Die zusammengehörigen Coefficienten a u. A, b u. B, c u. C, ꝛc. können Ausdrücke für Größen seyn, die auf die mannigfaltigste Weise zusammengesetzt sind, ohne daß dadurch die Schlüsse des vorigen Satzes weniger gültig wären.

§. 42 Lehrs. Soll die Funktion

$$a + bz + cz^2 + dz^3 + \ldots = 0$$

für jeden Werth des z zu Null werden, so muß jeder ihrer Coefficienten $a, b, c, \ldots = 0$ seyn.

Bew. Da die Funktion immer $= 0$ seyn soll, was für einen Werth man auch dem z geben möge, so muß sie auch $= 0$ seyn, wenn man $z = 0$ setzt. Für $z = 0$ ist aber offenbar $a = 0$. Folglich ist auch

$$0 + bz + cz^2 + \ldots = 0,$$

oder $b + cz + dz^2 + \ldots = 0.$

Da nun diese Funktion ebenfalls $= 0$ seyn muß für $z = 0$, so ist auch $b = 0$ ꝛc.

§. 43. Aufg. Man soll die Funktion $\frac{A}{a + bx}$ in eine Reihe verwandeln.

Aufl. Aus der Lehre von der Division weiß man, daß sich $\frac{A}{a + bx}$ durch eine Reihe von der Form $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \ldots$ ausdrücken läßt. Man setze also, es sey $\frac{A}{a + bx} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \ldots$, wo die Coefficienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}, \ldots$ noch unbestimmt sind, aber bestimmt werden sollen. Aus der angenommenen Gleichung folgt

$$A = (a + bx)(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \ldots)$$

$$= a\mathfrak{A} + \left.\begin{matrix} a\mathfrak{B} \\ + b\mathfrak{A} \end{matrix}\right| x + \left.\begin{matrix} a\mathfrak{C} \\ + b\mathfrak{B} \end{matrix}\right| x^2 + \left.\begin{matrix} a\mathfrak{D} \\ + b\mathfrak{C} \end{matrix}\right| x^3 + \ldots$$

Also ist auch

$$0 = \left.\begin{matrix} a\mathfrak{A} \\ - A \end{matrix}\right. + \left.\begin{matrix} a\mathfrak{B} \\ + b\mathfrak{A} \end{matrix}\right| x + \left.\begin{matrix} a\mathfrak{C} \\ + b\mathfrak{B} \end{matrix}\right| x^2 + \left.\begin{matrix} a\mathfrak{D} \\ + b\mathfrak{C} \end{matrix}\right| x^3 + \ldots$$

Da nun für x jeder Werth gesetzt werden kann, so muß seyn

$$\left.\begin{matrix} a\mathfrak{A} - A = 0 \\ a\mathfrak{B} + b\mathfrak{A} = 0 \\ a\mathfrak{C} + b\mathfrak{B} = 0 \\ a\mathfrak{D} + b\mathfrak{C} = 0 \\ \ldots \end{matrix}\right\} ;\ \text{also ist} \left\{\begin{matrix} \mathfrak{A} = \frac{A}{a} \\ \mathfrak{B} = -\frac{bA}{a} = -\frac{bA}{a^2} \\ \mathfrak{C} = -\frac{b\mathfrak{B}}{a} = +\frac{b^2A}{a^3} \\ \mathfrak{D} = -\frac{b\mathfrak{C}}{a} = -\frac{b^3A}{a^4} \\ \ldots \end{matrix}\right.$$

Folglich

$$\frac{A}{a + bx} = \frac{A}{a} - \frac{bA}{a^2}x + \frac{b^2A}{a^3}x^2 - \frac{b^3A}{a^4}x^3 + \ldots$$

Das Gesetz, nach welchem sich die Coefficienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, ... finden lassen, so wie die Wahrheit der Behauptung, daß man deren, so viel man will, nach demselben bestimmen kann, ist in die Augen fallend.

Sind zwei auf einander folgende Coefficienten $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$, so ist $\mathfrak{Q} = -\frac{b\mathfrak{P}}{a}$.

§. 44. Wäre die Form der Reihe, die man dem Bruch $\frac{A}{a + bx}$ gleich gesetzt hat, nicht richtig gewesen, so wäre man bei den Schlüssen, die man auf diese Gleichsetzung gegründet hat, auf eine Ungereimtheit gestoßen.

Man setze z. B.

$$\frac{A}{a + bx} = \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}x^2 + \mathfrak{C}x^3 + \ldots,$$

so ist

$$A = a\mathfrak{A}x + \left.\begin{matrix} a\mathfrak{B} \\ + b\mathfrak{A} \end{matrix}\right| x^2 + \left.\begin{matrix} a\mathfrak{C} \\ + b\mathfrak{B} \end{matrix}\right| x^3 + \ldots$$

$$\text{und } 0 = -A + \begin{array}{l|l|l} a\mathfrak{A}x + a\mathfrak{B} & x^2 + a\mathfrak{C} & x^3 + \ldots \\ \quad\;\; + b\mathfrak{A} & \quad + b\mathfrak{B} & \end{array}$$

Es müßte also $A = 0$ seyn. A ist aber irgend eine andere bestimmte Zahl.

Daß das erste Glied der für $\frac{A}{a + bx}$ angenommenen Reihe nicht x enthalten kann, sieht man schon, wenn man des Bruchs $\frac{A}{a + bx}$ Zähler A durch das erste Glied seines Nenners dividirt.

§. 45. Lehrs. Erhebt man $(x + u)$ auf die erste, 2te, 3te, 4te Potenz, so bekommt man durch Entwicklung

$$(x + u)^1 = x + 1 . u$$
$$(x + u)^2 = x^2 + 2xu + u^2$$
$$(x + u)^3 = x^3 + 3x^2u + 3xu^2 + u^3$$
$$(x + u)^4 = x^4 + 4x^3u + 6x^2u^2 + 4xu^3 + u^4.$$

Die Exponenten von x einer jeden der hier entwickelten Potenzen nehmen von dem Exponenten der unentwickelten Potenz an bis 0 ab, und die Exponenten von u von 0 an bis zu dem Exponenten der unentwickelten Potenz zu. Auch ist der Coefficient des zweiten Gliedes einer jeden entwickelten Potenz jedesmal dem Exponenten der unentwickelten Potenz gleich. Es läßt sich zeigen, daß die bemerkten Gesetze für jeden bejahten ganzen Exponenten des Binomiums $x + u$ gelten.

Bew. Man setze, es sey

$$(x+u)^n = x^n + nx^{n-1}u + Bx^{n-2}u^2 + \ldots + Px^2u^{n-2} + Qxu^{n-1} + Ru^n$$

u. multiplicire auf beiden Seiten der angenommenen Gleichung mit $x + u$, so erhält man $(x + u)^{n+1} =$

$$x^{n+1} + \begin{array}{l|l|l|l|l|l} nx^n & u + Bx^{n-1} & u^2 + \ldots + Px^3 & u^{n-2} + Qx^2 & u^{n-1} + Rx & u^n \\ + 1 . x_n & \;\; + nx^{n-1} & \;\; + \ldots + Ox^3 & \quad\;\; + Px^2 & \quad\;\; + Qx & + Ru^{n+1} \end{array}$$

Gelten also die aufgestellten Behauptungen für die nte Potenz, so gelten sie auch für die $n + 1$te. Sie gelten aber für die 4te, also auch für die 5te, rc.



§. 46. Setzt man $x = 1$, so hat man
$(1+u)^n = 1 + nu + Bu^2 + \ldots + Pu^{n-2} + Qu^{n-1} + Ru^n$.

§. 47. Aufg. Die Potenz $(1+x)^n$ durch eine Reihe auszudrücken, vorausgesetzt, daß n eine bejahte ganze Zahl ist.

Aufl. Man setze

$$(1+x)^n = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots \ (♁.)$$

Nun bringe man statt x in die Gleichung ♁ einmal $x+u$, u. das anderemal $\frac{x}{p}$, was geschehen darf, da man für x jeden beliebigen Werth setzen kann.

Durch die erste Setzung erhält man

$$(1+x+u)^n = 1 + A(x+u) + B(x+u)^2 + C(x+u)^3 + \ldots \ (⊙)$$

u. durch die zweite

$$(1+\frac{x}{p})^n = 1 + A.\frac{x}{p} + B.\frac{x^2}{p^2} + C.\frac{x^3}{p^3} + \ldots$$

Aus letzterer Gleichung ergibt sich

$$p^n(1+\frac{x}{p})^n = (p+x)^n =$$
$$p^n + Ap^{n-1}x + Bp^{n-2}x^2 + Cp^{n-3}x^3 + \ldots,$$

oder, wenn man u statt x setzt,

$$(p+u)^n = p^n + Ap^{n-1}u + Bp^{n-2}u^2 + Cp^{n-3}u^3 + \ldots$$

Man setze $p = 1 + x$. Das gibt $(1+x+u)^n =$
$(1+x)^n + A(1+x)^{n-1}u + B(1+x)^{n-2}u^2 + C(1+x)^{n-3}u^3 + \ldots$ (☾.)

Folglich ist aus ⊙ u. ☾

$$1 + A(x+u) + B(x+u)^2 + C(x+u)^3 + \ldots =$$
$$(1+x)^n + A(1+x)^{n-1}u + B(1+x)^{n-2}u^2 + C(1+x)^{n-3}u^3 + \ldots$$

Man entwickle die erste Seite dieser Gleichung. Man braucht die Entwicklung der Potenzen $(x+u)^2$, $(x+u)^3$, ..., wie aus dem folgenden erhellen wird, nur bis zum zweiten Glied fortzusetzen. So weit kann sie aber nach §. 45. gefunden werden. Ich habe sie indessen der Deutlichkeit wegen etwas weiter fortgesetzt. Durch die bemerkte Entwicklung erhält man

$$\left.\begin{array}{llll} 1 & & & \\ +Ax & +Au & & \\ +Bx^2 & +2Bxu & +Bu^2 & \\ +Cx^3 & +3Cx^2u & +3Cxu^2 & +Cu^3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right\} =$$

$$(1+x)^n + A(1+x)^{n-1}u + B.(1+x)^{n-2}u^2 + C.(1+x)^{n-3}u^3 + \ldots$$ ♀

Nun ist

$$(1+x)^n = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots$$

Läßt man auf beiden Seiten der Gleichung ♀ die gleichen Größen weg, so erhält man

$$\left.\begin{array}{l|l|l|l} A & u & & \\ +2Bx & +B & u^2 & \\ +3Cx^2 & +3Cx & +C & u^3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \end{array}\right\} =$$

$$A(1+x)^{n-1}.u + B.(1+x)^{n-2}u^2 + \ldots$$

Dividirt man diese Gleichung durch u, so bekommt man

$$\left.\begin{array}{ll|l|l} A & & & \\ +2Bx & +B & u & \\ +3Cx^2 & +3Cx & +C & u^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \end{array}\right\} =$$

$$A(1+x)^{n-1} + B(1+x)^{n-2}u + C(1+x)^{n-3}u^2$$

Nun kann u jeden beliebigen Werth erhalten. Man setze also $u = 0$. Dadurch erhält man

$$A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + \ldots = A(1+x)^{n-1} = A.\frac{(1+x)^n}{1+x}$$

Folglich ist auch

$$(A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + \ldots)(1+x) = A.(1+x)^n$$

oder

$$\begin{array}{l|l|l|l} A+2B & x+3C & x^2+4D & x^3+\ldots = \\ \;\;+A & \;\;+2B & \;\;+3C & \end{array}$$

$$A + AAx + ABx^2 + ACx^3 + \ldots$$

Folglich

$$\left.\begin{array}{l} A = A \\ 2B + A = AA \\ 3C + 2B = AB \\ 4D + 3C = AC \\ \ldots\ldots \end{array}\right\}; \text{ also } \left\{\begin{array}{l} A = A \\ B = \frac{(A-1)A}{2} \\ C = \frac{(A-2)B}{3} \\ D = \frac{(A-3)C}{4} \\ \ldots\ldots, \end{array}\right.$$

oder $A = A$, $B = \frac{A(A-1)}{1 \cdot 2}$, $C = \frac{A(A-1)(A-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$,

$D = \frac{A(A-1)(A-2)(A-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$, ꝛc.

Folglich ist $(1+x)^n =$

$$1 + Ax + \frac{A(A-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{A(A-1)(A-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \frac{A(A-1)(A-2)(A-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}x^4 + \ldots$$

Nun ist nach (§. 45.) $A = n$; also $(1+x)^n =$

$$1 + nx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}x^4 + \ldots$$

§. 48. Es sey $x = \frac{b}{a}$, so ist $(1+\frac{b}{a})^n =$

$$1 + n \cdot \frac{b}{a} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{b^2}{a^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{b^3}{a^3} + \ldots$$

Also $a^n \cdot (1+\frac{b}{a})^n = (a+b)^n$

$$= a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^{n-3}b^3 + \ldots$$

§. 49. Lehrs. Erhebt man die Reihe

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \ldots$$

auf eine Potenz von einem bejahten ganzen Exponenten, so erhält man eine Reihe, die mit der gegebenen einerlei Form hat.

Bew. Man multiplicire

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \ldots$$

$$\text{mit } a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \ldots$$

Man erhält hierdurch

$$\begin{array}{l|l|l|l|l}
aa + ab & x + ac & x^2 + ad & x^3 + ae & x^4 + \ldots \\
 + ba & + bb & + bc & + bd & \\
 & + ca & + cb & + cc & \\
 & & + da & + db & \\
 & & & + ea &
\end{array}$$

Dieses setze man =

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots$$

Durch die Multiplication dieser Reihe mit

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \ldots$$

bekommt man

$$\begin{array}{l|l|l|l|l}
aA + aB & x + aC & x^2 + aD & x^3 + aE & x^4 + \ldots \\
 + bA & + bB & + bC & + bD & \\
 & + cA & + cB & + cC & (♀.) \\
 & & + dA & + dB & \\
 & & & + eA &
\end{array}$$

d. i. eine Reihe, die nach den Potenzen von x auf eben die Art fortschreitet, wie $a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \ldots$

Setzt man nun die Reihe (♀.) =

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \ldots,$$

und multiplicirt wieder mit

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots,$$

so muß man, wie leicht einzusehen ist, wieder eine Reihe erhalten, die nach den Potenzen von x auf eben die Art fortgeht, wie die Reihe $a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots$.

§. 50. Es sey m eine bejahte ganze Zahl, so ist $(bx + cx^2 + dx^3 + \ldots)^m = (b + cx + dx^2 \ldots)^m \cdot x^m =$ $(B + Cx + Dx^2 + \ldots) \cdot x^m = Bx^m + Cx^{m+1} + Dx^{m+2} + \ldots$

Hieraus ergibt sich $(bx + cx^2 + dx^3 + \ldots)^1 =$ $Bx + Cx^2 + Cx^3 + \ldots$, $(bx + cx^2 + dx^3 + \ldots)^2 =$ $Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots$ ꝛc.

§. 51. Durch Ausziehung der Quadratwurzel findet man,

$$\sqrt{(1 + x)} = (1 + x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{16}x^3 - \ldots$$

Hieraus und aus §. 49. folgt, daß sich auch

$$(1 + x)^{\frac{2}{2}},\ (1 + x)^{\frac{3}{2}},\ (1 + x)^{\frac{4}{2}},\ (1 + x)^{\frac{5}{2}},\ (1 + x)^{\frac{6}{2}},\ \text{ꝛc.}$$

durch Reihen von der Form

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \ldots$$

ausdrücken lassen.

Durch Ausziehung der Kubikwurzel würde man finden

$$\sqrt[3]{(1+x)} = (1+x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{9}x^2 + \tfrac{5}{81}x^3 - \ldots$$

§. 52. Wie man vermittelst der Formel $a^2 + 2ab + b^2$ die Quadrat-, und vermittelst der Formel $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ die Kubikwurzel aus einer binomischen Größe $1 + x$ in einer Reihe darstellen kann, so kann man auch vermittelst der §. 48. gefundenen Formel

$$a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^{n-3}b^3 + \ldots \; (\odot)$$

die nte Wurzel aus der Größe $1 + x$ in einer Reihe ausdrücken. Das Verfahren in diesem Falle, das mit dem Verfahren in jenen Fällen einerlei ist, setze ich als bekannt voraus. Mir kommt es hier nur darauf an, zu zeigen, welches die Gestalt der Reihe ist, die man durch Ausziehung der nten Wurzel aus $1 + x$ erhält.

Zieht man aus dem ersten Theil der Größe $1 + x$

$$
\begin{array}{rl}
1 + x & \big|\; 1 + \frac{1}{n}x + \frac{A}{n}x^2 + \ldots \\
1 & \\
\hline
n:) \quad + x & \\
(\alpha.) \quad x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{x^2}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{x^3}{n^3} + \ldots & \\
\hline
n + \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}x^2 + \ldots :) \; (\beta.) \; Ax^2 + Bx^3 + Cx^4 + Dx^5 + Ex^6 + \ldots & \\
(\gamma.) \left\{ \begin{array}{r} A'x^2 + B'x^3 + C'x^4 + D'x^5 + E'x^6 + \ldots \\ + C''x^4 + D''x^5 + E''x^6 + \ldots \\ + E'''x^6 + \ldots \end{array} \right. & \\
\hline
n + \mathfrak{A}'x + \mathfrak{B}'x^2 + \ldots :) \; (\delta.) \; B^{\prime v}x^3 + C^{\prime v}x^4 + D^{\prime v}x^5 + E^{\prime v}x^6 + \ldots &
\end{array}
$$

u. s. w.

die nte Wurzel, so erhält man als den ersten Theil der gesuchten Wurzel 1. Die nte Potenz von 1 ist 1. Dieses 1 von der Größe $1 + x$ abgezogen, gibt x als Rest. Das a in der Formel $\odot$ ist hier $= 1$; also das na^{n-1} derselben hier $= n$. Dividirt man den Rest x durch n, so erhält man den zweiten

Theil der gesuchten Wurzel oder das b der Formel ☉ $= \frac{1}{n}x$. Aus dem ersten und zweiten Theil der gesuchten Wurzel ergibt sich das $na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}b^3 + \ldots$ der Formel ☉ hier $= x + \frac{n(n-1)}{1.2}.\frac{x^2}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}.\frac{x^3}{n^3} + \ldots$ Diese Reihe, in welcher die Exponenten von x nach einem deutlich in die Augen fallenden Gesetze fortschreiten und welche α heißen soll, muß von dem erwähnten Rest x abgezogen werden. Der Rest β, der bei der Abziehung des α von x bleibt, ist eine Reihe von der Form $Ax^2 + Bx^3 + Cx^4 + \ldots$ Nun hat man $1 + \frac{1}{n}x$ als den ersten Theil der gesuchten Wurzel, d. i. als a der Formel ☉ zu betrachten. Das na^{n-1} der Formel ☉ wäre also jetzt hier $= n(1 + \frac{1}{n}x)^{n-1}$ = einer Reihe von der Form $n + \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}x^2 + \ldots$ Dividirt man mit dieser Reihe in den Rest β, so erhält man das b in ☉ jetzt hier $= \frac{A}{n}x^2$. Nun hat man die Größen $\frac{A}{n}x^2$, $(\frac{A}{n}x^2)^2$, $(\frac{A}{n}x^2)^3, \ldots$ respective in die Größen $n(1+\frac{1}{n}x)^{n-1}$, $\frac{n(n-1)}{1.2}(1+\frac{1}{n}x)^{n-2}$, $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}.(1+\frac{1}{n}x)^{n-3}, \ldots$ zu multipliciren. Dadurch bekommt man Reihen von der Form der Reihen in γ. Durch Abziehung des γ von β erhält man δ als Rest. Betrachtet man nun $1 + \frac{1}{n}x + \frac{A}{n}x^2$ als den ersten Theil der gesuchten Wurzel, d. i. als das a der Formel ☉, so ist jetzt das na^{n-1} derselben $= n(1 + \frac{1}{n}x + \frac{A}{n}x^2)^{n-1}$ = einer Reihe von der Form $n + \mathfrak{A}'x + \mathfrak{B}'x^2 + \ldots$ rc.

Aus dem Bisherigen geht zur Genüge hervor, daß man setzen kann.

$$\sqrt[n]{(1+x)} = (1+x)^{\frac{1}{n}} = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots$$

§. 53. Also kann man auch setzen

$$(1+x)^{\frac{m}{n}} = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots$$

§. 54. Durch die Division findet man

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots.$$

Also kann man auch setzen

$$(1+x)^{-n} = (1+x)^{-1} . (1+x)^{-1} . (1+x)^{-1} \ldots..$$

$$= 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots$$

§. 55. Endlich läßt sich durch die Division darthun, daß man setzen kann

$$\frac{1}{1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots} = 1 + \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}x^2 + \mathfrak{C}x^3 + \ldots$$

Nun kann gesetzt werden

$$(1+x)^{\frac{m}{n}} = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots$$

und es ist

$$(1+x)^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{(1+x)^{\frac{m}{n}}}$$

Also kann man auch setzen

$$(1+x)^{-\frac{m}{n}} = 1 + \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}x^2 + \mathfrak{C}x^3 + \ldots$$

§. 56. Was für eine Zahl auch n bedeuten möge, so kann man immer setzen

$$(1+x)^n = 1 + Ax + Bz^2 + Cx^3 + \ldots.$$

§. 57. Lehrs. Erhebt man $1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 \ldots$ auf die mte Potenz, wo m eine bejahte ganze Zahl ist, so ist der Coefficient des zweiten Gliedes der entwickelten Potenz $= mA$.

Bew. Man kann sich durch die Multiplication leicht überzeugen, daß

$$(1 + Ax + Bx^2 + \ldots)^2 = 1 + 2Ax + \mathfrak{B}x^2 + \ldots \text{ ist.}$$

Man nehme an, es sey

$$(1 + Ax + Bx^2 + \ldots)^m = 1 + mAx + \mathfrak{B}'x^2 + \ldots,$$

so erhält man, wenn man auf beiden Seiten der Gleichung mit $1 + Ax + Bx^2 + \ldots$ multiplicirt,

$$(1 + Ax + Bx^2 + \ldots)^{m+1} = \begin{array}{r|l} 1 + mA & x + \mathfrak{B}'x^2 + \ldots \\ + A & + mAAx^2 + \ldots \end{array}$$
$$= 1 + (m + 1)Ax + \ldots$$

Ist also der behauptete Satz für die $m$te Potenz wahr, so ist er auch für die $m + 1$te Potenz wahr. Nun gilt er für die zweite, also auch für die dritte, also auch für die vierte ꝛc.

§. 58. Aufg. Die Potenz $(1 + x)^n$ durch eine Reihe auszudrücken, n mag, welche Zahl man will bedeuten.

Aufl. Man setze

$$(1 + x)^n = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots$$

Nun bringe man statt x in diese Gleichung, einmal $x+u$, und das andere Mal $\frac{x}{p}$, was geschehen darf, da man für x jeden beliebigen Werth setzen kann.

Durch Wiederholung der in §. 47. gemachten Schlüsse findet man endlich

$$(1 + x)^n = 1 + Ax + \frac{A(A-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{A(A-1)(A-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 \ldots$$

§. 59. Ist n eine bejahte ganze Zahl, so ist aus (§. 47.)

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \ldots$$

Es sey $(1 + x)^{\frac{n}{m}} = 1 + Ax + Bx^2 + \ldots\ldots$, wo $\frac{n}{m}$ ein bejahter Bruch ist.

Also ist

$$(1 + x)^n = (1 + Ax + Bx^2 + \ldots)^m$$

Nun ist, da n und m bejahte ganze Zahlen sind,

$(1 + x^n) = 1 + nx + \mathfrak{B}x^2 + \ldots.$

und $(1 + Ax + Bx^2 + \ldots)^m = 1 + mAx + \mathfrak{B}'x^2 + \ldots$

Folglich

$$1 + mAx + \mathfrak{B}'x^2 + \ldots = 1 + nx + \mathfrak{B}x^2 + \ldots$$

Da nun die beiden Seiten dieser Gleichung identische Grössen sind, so ist

$$mA = n$$
$$\text{u. } A = \frac{n}{m}$$

Also ist

$$(1+x)^{\frac{n}{m}} = 1 + \frac{n}{m}x + \frac{\frac{n}{m}(\frac{n}{m}-1)}{1.\ 2}x^2 + \frac{\frac{n}{m}(\frac{n}{m}-1)(\frac{n}{m}-2)}{1.\ 2\ .\ 3}.\ x^3 + \ldots$$

Es sey endlich

$$(1+x)^{-\frac{n}{m}} = 1 + A'x + B'x^2 + \ldots$$

Nun ist

$$(1+x)^{\frac{n}{m}} = 1 + \frac{n}{m}x + \mathfrak{B}x^2 + \ldots$$

Also

$$(1+x)^{-\frac{n}{m}}.\ (1+x)^{\frac{n}{m}} = 1 + \begin{array}{l|l} A' & x + B'x^2 + \ldots \\ + \frac{n}{m} & + \frac{n}{m}A'x^2 \\ & + \mathfrak{B}x^2 \end{array}$$

oder, da $(1+x)^{-\frac{n}{m}}.\ (1+x)^{\frac{n}{m}} = (1+x)^0 = 1$ ist,

$$0 = \begin{array}{l|l|l} A' & x + B' & x^2 + \ldots \\ + \frac{n}{m} & + \frac{n}{m}A' & \\ & + \mathfrak{B} & \end{array}$$

also, wenn man durch x dividirt,

$$0 = \begin{array}{l|l} A' + B' & x + \ldots \\ + \frac{n}{m} + \frac{n}{m}A' & \\ \quad + \mathfrak{B} & \end{array}$$

Da diese Gleichung nun für jeden Werth des x gelten soll, so ist $A' = -\frac{n}{m}$.

Folglich ist

$$(1+x)^{-\frac{n}{m}} = 1 - \frac{n}{m}x + \frac{-\frac{n}{m}(-\frac{n}{m}-1)}{1.\ 2}.\ x^2 + \frac{-\frac{n}{m}(-\frac{n}{m}-1)(-\frac{n}{m}-2)}{1.\ 2\ .\ 3}.x^3 + \ldots$$

§. 60. Was für eine Zahl also n bedeutet, so ist immer

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2\ .\ 3}x^3 + \ldots.$$

Das $m+1$te Glied dieser Reihe ist =

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots.(n-(m-1)}{1.\ 2\ .\ 3\ \ldots.\ m}x^m.$$

Setzt man statt x, $\frac{x}{p}$, so erhält man

$$(1+\frac{x}{p})^n = 1 + n.\frac{x}{p} + \frac{n(n-1)}{1.\ 2}.\frac{x^2}{p^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2\ .\ 3}.\frac{x^3}{p^3} + \ldots$$

Also ist

$$p^n \,.\, (1 + \frac{x}{p})^n = (p + x)^n =$$

$$p^n + n \,.\, p^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2} p^{n-2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \,.\, p^{n-3}x^3 + \ldots$$

Der $m+1$te Coefficient ist $= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(m-1))}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots m}$.

Ist n eine bejahte ganze Zahl und $m - 1 = n$, also $m = n + 1$, so werden der $m + 1$te und alle folgenden Coefficienten $= 0$, da sie Null als einen Faktor enthalten, die Reihe bricht ab und das $m$te oder $n + 1$te Glied ist das letzte.

Ist aber n nicht eine bejahte ganze Zahl, so bricht die Reihe nie ab.

§. 61. Erkl. Der Satz, daß

$$(p + x)^n = p^n + np^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2} p^{n-2}x^2 + \ldots$$

ist, heißt der binomische.

§. 62. Ex. Es ist

$$\sqrt{(1+x)} = (1 + x)^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2} \,.\, 1^{\frac{1}{2}-1} \,.\, x + \frac{\frac{1}{2} \,.\, (\frac{1}{2}-1)}{1 \,.\, 2} 1^{\frac{1}{2}-2} \,.\, x^2 + \ldots$$

$$= 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{16}x^3 - \ldots$$

Man findet dies auch durch folgendes Verfahren. Man setze

$$\sqrt{(1 + x)} = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots$$

Hieraus folgt

$$1 + x = \left\{ \begin{array}{l} \;\;\;\;\; 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots \text{ mult.} \\ \text{mit } 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r|r|r|l} = 1 + 1 \,.\, A & x + 1 \,.\, B & x^2 + 1 \,.\, C & x^3 + \ldots \\ A \,.\, 1 & + A \,.\, A & + AB & \\ & + B \,.\, 1 & + BA & \\ & & + C \,.\, 1 & \end{array}$$

Folglich ist

$$\begin{array}{r|r|r|l} 0 = 1 \,.\, A & x + 1 \,.\, B & x^2 + 1 \,.\, C & x^3 + \ldots \\ A \,.\, 1 & + AA & + AB & \\ - 1 & + B \,.\, 1 & + BA & \\ & & + C \,.\, 1 & \end{array}$$

Folglich

$$\left.\begin{array}{l} 1 \,.\, A + A \,.\, 1 - 1 = 0 \\ 1 \,.\, B + AA + B \,.\, 1 = 0 \\ 1 \,.\, C + AB + BA + C \,.\, 1 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \text{und} \left\{\begin{array}{l} A = \frac{1}{2} \\ B = \frac{-AA}{2} \\ C = \frac{-AB - BA}{2} \\ \ldots\ldots \end{array}\right.$$

Es wäre überhaupt

$$\text{Coefficient } Q = \frac{-AP - BO - CN - DM - \ldots - OB - PA}{2}$$

Hier wird also jeder Coefficient, aus allen, die ihm vorhergehen, bestimmt.

Berechnet man die Coefficienten, so erhält man
$A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{8}$, $C = +\frac{1}{16}$, 2c.

§. 63. Lehrs. Die Potenz $(a+bx+cx^2+dx^3+\ldots)^n$, wo n jede beliebige Zahl bedeutet, läßt sich in eine Reihe von der Form $A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots$ entwickeln.

Bew. Man setze

$$(a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots)^n = (a + k)^n$$

Hieraus erhält man nach dem binomischen Lehrsatze

$$(a+k)^n = a^n + na^{n-1}k + \frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2} \,.\, a^{n-2}k^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \,.\, a^{n-3}k^3 + \ldots$$

Also ist $(a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots)^n =$

$$\left\{\begin{array}{l} a^n + na^{n-1}\,[bx + cx^2 + dx^3 + \ldots]^1 \\ \quad + \frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2} \,.\, a^{n-2}\,[bx + cx^2 + dx^3 + \ldots]^2 \\ \quad + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \,.\, a^{n-3}\,[bx + cx^2 + dx^3 + \ldots]^3 \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Nun geben die Potenzen von $bx + cx^2 + dx^3 + \ldots$ bei ihrer Entwicklung Reihen von den Formen

$$\begin{array}{l} B'x + C'x^2 + D'x^3 + E'x^4 + \ldots, \\ \quad B''x^2 + C''x^3 + D''x^4 + \ldots, \\ \quad\quad + B'''x^3 + C'''x^4 + \ldots, \\ \quad\quad\quad \ldots\ldots \end{array}$$

(§. 50.)

Da man nun die Coefficienten B', C', D', 2c., B'', C'', D'', 2c., B''', C''', 2c., wie in die Augen fällt, durch b,

c, d, ... ausdrücken kann, so ist klar, daß sich die Potenz $(a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots)^n$ in eine Reihe von der Form $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$ verwandeln läßt.

§. 64. Aufg. Man soll $(a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots)^n$, wenn n eine bejahte ganze Zahl bedeutet, in eine Reihe verwandeln.

Aufl. Man setze

$$(a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots)^n = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$$

und

$$(a + by + cy^2 + dy^3 + \ldots)^n = A + By + Cy^2 + Dy^3 + \ldots$$

Der Kürze wegen sey gesetzt

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots = u$$

und $a + by + cy^2 + dy^3 + \ldots = v$

Also ist auch

$$(a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots)^n = u^n$$

und $(a + by + cy^2 + dy^3 + \ldots)^n = v^n$

Folglich ist

$$\frac{u^n - v^n}{u - v} = \frac{B(x-y) + C(x^2-y^2) + D(x^3-y^3) + \ldots}{b(x-y) + c(x^2-y^2) + d(x^3-y^3) + \ldots}$$

Man dividire den Zähler des Bruchs auf der linken Seite der Gleichung durch den Nenner; auf der rechten Seite dividire man Zähler und Nenner durch x-y. Hierdurch erhält man (§. 37.)

$$u^{n-1} + u^{n-2}v + u^{n-3}v^2 + \ldots + u^2v^{n-3} + uv^{n-2} + v^{n-1}$$
$$= \frac{B + C(x + y) + D(x^2 + xy + y^2) + \ldots}{b + c(x + y) + d(x^2 + xy + y^2) + \ldots}$$

Setzt man nun $x = y$, also $u = v$, so bekommt man

$$nu^{n-1} = \frac{B + 2Cx + 3Dx^2 + \ldots}{b + 2cx + 3dx^2 + \ldots}$$

Nun ist

$$u^{n-1} = (a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots)^{n-1}$$
$$= \frac{(a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots)^n}{a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots}$$
$$= \frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots}{a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots}$$

Also ist

$$\frac{n(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots)}{a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots} = \frac{B + 2Cx + 3Dx^2 + \ldots}{b + 2cx + 3dx^2 + \ldots}$$

Folglich

$$n(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots)(b + 2cx + 3dx^2 + \ldots)$$
$$= (B + 2Cx + 3Dx^2 + \ldots)(a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots) \; (\odot)$$

Durch Vollziehung der angezeigten Multiplicationen erhält man

$$\left.\begin{array}{l|l|l|l} nbA + nbB & x + nbC & x^2 + nbD & x^3 + \ldots \\ + 2ncA & + 2ncB & + 2ncC & \\ & + 3ndA & + 3ndB & \\ & & + 4neA & \end{array}\right\} =$$

$$= \left\{\begin{array}{l|l|l|l} aB + 2aC & x + 3aD & x^2 + 4aE & x^3 + \ldots \\ + bB & + 2bC & + 3bD & \\ & + cB & + 2cC & \\ & & + dB & \end{array}\right.$$

Hieraus ergibt sich, wenn man die Coefficienten von einerlei Potenzen von x gleich setzt,

$$aB = nbA$$
$$2aC = (n-1)bB + 2ncA$$
$$3aD = (n-2)bC + (2n-1)cB + 3ndA$$
$$4aE = (n-3)bD + (2n-2)cC + (3n-1)dB + 4neA$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Man kann also jeden von den Coefficienten B, C, D, E, ... aus allen, die ihm vorhergehen, nach einem sogleich in die Augen fallenden Gesetze, bestimmen, wenn A bestimmt ist.

Um A zu bestimmen, bedenke man, daß die Gleichung

$$(a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots)^n = A + Bx + Cx^2 + \ldots$$

für jeden Werth des x, also auch für $x = 0$ gelten muß. Setzt man nun $x = 0$, so erhält man $A = a^n$.

§. 65. Aufg. $(a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots)^{\frac{m}{n}}$ in eine Reihe zu verwandeln, wenn $\frac{m}{n}$ ein bejahter Bruch ist.

Aufl. Es sey

$$(a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots)^{\frac{m}{n}} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$$

und

$$(a + by + cy^2 + dy^3 + \ldots)^{\frac{m}{n}} = A + By + Cy^2 + Dy^3 + \ldots$$

Man setze

$$(a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots)^{\frac{1}{n}} = u$$

$$(a + by + cy^2 + dy^3 + \ldots)^{\frac{1}{n}} = v$$

Also

$$(a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots)^{\frac{m}{n}} = u^m$$

$$(a + by + cy^2 + dy^3 + \ldots)^{\frac{m}{n}} = v^m$$

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots = u^n$$

$$a + by + cy^2 + dy^3 + \ldots = v^n$$

Folglich ist

$$\frac{u^m - v^m}{u^n - v^n} = \frac{B(x-y) + C(x^2 - y^2) + D(x^3 - y^3) + \ldots}{b(x-y) + c(x^2 - y^2) + d(x^3 - y^3) + \ldots}$$

Man dividire Zähler und Nenner auf der rechten durch $x - y$ und auf der linken durch $u - v$. Hierdurch bekommt man, da m und n bejahte ganze Zahlen sind,

$$\frac{u^{m-1} + u^{m-2}v + u^{m-3}v^2 + \ldots + u^2v^{m-3} + uv^{m-2} + v^{m-1}}{u^{n-1} + u^{n-2}v + u^{n-3}v^2 + \ldots + u^2v^{n-3} + uv^{n-2} + v^{n-1}}$$

$$= \frac{B + C(x+y) + D(x^2 + xy + y^2) + \ldots}{b + c(x+y) + d(x^2 + xy + y^2) + \ldots}$$

Setzt man nun $x = y$, also auch $u = v$ so ergibt sich

$$\frac{mu^{m-1}}{nu^{n-1}} = \frac{m}{n} \cdot \frac{u^m}{u^n} = \frac{m}{n} \cdot \frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots}{a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots}$$

$$= \frac{B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \ldots}{b + 2cx + 3dx^2 + 4ex^3 + \ldots}$$

Also ist

$$\frac{m}{n} \cdot (A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots)(b + 2cx + 3dx^2 + \ldots)$$

$$= (B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \ldots)(a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots)$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der Gleichung ⊙ des vorigen §., so sieht man, daß die dort gefundenen Gesetze zur Bestimmung der Coefficienten A, B, C, ... auch hier gel-

ten. Um die Coefficienten hier zu finden, darf man dort $\frac{m}{n}$ nur statt n setzen.

§. 66. Aufg. Man soll $(a+bx+cx^2+dx^3+\ldots)^{-\frac{m}{n}}$ in eine Reihe verwandeln.

Aufl. Setzt man in dem vorigen §. $-m$ statt m, so erhält man

$$\frac{u^{-m}-v^{-m}}{u^n-v^n}=\frac{B(x-y)+C(x^2-y^2)+D(x^3-y^3)+\ldots}{b(x-y)+c(x^2-y^2)+d(x^3-y^3)+\ldots}$$

Nun ist

$$\frac{u^{-m}-v^{-m}}{u^n-v^n}=\frac{\frac{1}{u^m}-\frac{1}{v^m}}{u^n-v^n}=\frac{v^m-u^m}{u^mv^m(u^n-v^n)}$$

$$=-\frac{u^m-v^m}{u^mv^m(u^n-v^n)}$$

Also ist

$$-\frac{1}{u^mv^m}\cdot\frac{u^m-v^m}{u^n-v^n}=\frac{B(x-y)+C(x^2-y^2)+D(x^3-x^3)+\ldots}{b(x-y)+c(x^2-y^2)+d(x^3-y^3)+\ldots}$$

Auf der linken Seite dividire man Zähler und Nenner durch $u-v$, und auf der rechten durch $x-y$. Man erhält hierdurch

$$-\frac{1}{u^mv^m}\cdot\frac{u^{m-1}+u^{m-2}v+u^{m-3}v^2+\ldots+u^2v^{m-3}+uv^{m-2}+v^{m-1}}{u^{n-1}+u^{n-2}v+u^{n-3}v^2+\ldots+u^2v^{n-3}+uv^{n-2}+v^{n-1}}$$

$$=\frac{B+C(x+y)+D(x^2+xy+y^2)+\ldots}{b+c(x+y)+d(x^2+xy+y^2)+\ldots}$$

Setzt man nun $x=y$ und $u=v$, so ergibt sich

$$-\frac{1}{u^{2m}}\cdot\frac{m\cdot u^{m-1}}{n\cdot u^{n-1}}=\frac{B+2Cx+3Dx^2+\ldots}{b+2cx+3dx^2+\ldots}$$

Nun ist

$$-\frac{1}{u^{2m}}\cdot\frac{m\cdot u^{m-1}}{n\cdot u^{n-1}}=-\frac{m}{n}\cdot\frac{u^{-m}}{u}=-\frac{\frac{m}{n}[A+Bx+Cx^2+\ldots]}{a+bx+cx^2+\ldots}$$

Also

$$-\frac{\frac{m}{n}[A+Bx+Cx^2+\ldots]}{a+bx+cx^2+\ldots}=\frac{B+2Cx+3Dx^2+\ldots}{b+2cx+3dx^2+\ldots}$$

Folglich

$$-\frac{m}{n}.[A + Bx + Cx^2 + \ldots][b + 2cx + 3dx^2 + \ldots]$$
$$= (B + 2Cx + 3Dx^2 + \ldots)\ (a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots)$$

Das Coefficientengesetz (§. 64.) gilt auch für einen verneinten Exponenten.

§. 67. Es ist

$$ax^m + bx^{m+d} + cx^{m+2d} + dx^{m+3d} + \ldots$$
$$= x^m(a + bx^d + cx^{2d} + dx^{3d} + \ldots)$$

Also

$$[ax^m + bx^{m+d} + cx^{m+2d} + dx^{m+3d} + \ldots]^n$$
$$= x^{mn}[a + bx^d + cx^{2d} + dx^{3d} + \ldots]^n$$

In dem eingeklammerten Faktor auf der rechten Seite dieser Gleichung setze man $x^d = y$, so erhält man

$$(a + bx^d + cx^{2d} + dx^{3d} + \ldots)^n = (a + by + cy^2 + dy^3 + \ldots)^n$$

Die Potenz auf der rechten Seite dieser Gleichung läßt sich nach §. 64. entwickeln.

Die Form der entwickelten Reihe ist, wenn man x^d statt y setzt,

$$A + Bx^d + Cx^{2d} + Dx^{3d} + \ldots$$

Also ist die Form der Reihe, welche man für

$$[ax^m + bx^{m+d} + cx^{m+2d} + dx^{m+3d} + \ldots]^n$$

findet,

$$Ax^{mn} + Bx^{mn+d} + Cx^{mn+2d} + Dx^{mn+3d} + \ldots$$

Die Coefficienten A, B, C, D, ... werden, wie in §. 64., bestimmt.

Die Größe d kann auch verneint seyn.

§. 68. Erkl. Das Gesetz, nach welchem man die Potenz einer vielgliedrigen Größe in eine Reihe auflöset, heißt der polynomische Lehrsatz.

II. Verwandlung transcendenter Funktionen in Reihen.

A. Verwandlung exponentialer und logarithmischer Funktionen in Reihen.

§. 69. Erkl. Eine exponentiale Funktion ist eine Potenz mit einem veränderlichen Exponenten, z. B. a^x, z^x, wo a eine beständige, und x und z veränderliche Größen bedeuten.

§. 70. Aufg. Man soll die Funktion $y = a^x$ durch eine Reihe ausdrücken, deren Glieder nach den Potenzen von x geordnet sind.

Aufl. Um zu finden, auf welche Weise die Potenzen von x in der gesuchten Reihe fortschreiten, setze man $a = 1 + b$, also $a^x = (1+b)^x$, und entwickele $(1+b)^x$ nach dem binomischen Satze. Es ist $(1+b)^x =$

$$1 + xb + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} \cdot b^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot b^3 + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot b^4 + \ldots$$

Man vollziehe die Multiplication der Zähler der Binomialcoefficienten und ordne, von der niedrigsten Potenz von x anfangend, die Reihe für $(1+b)^x$ nach den Potenzen von x.

Das gibt $(1+b)^x =$

$$1 + bx + \frac{b^2}{2} \cdot (-x + x^2) + \frac{b^3}{2 \cdot 3}(2x - 3x^2 + x^3) + \frac{b^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot (-2 \cdot 3x + 11x^2 - 6x^3 + x^4) + \ldots$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} 1 + bx \\ - \frac{b^2}{2} \cdot x + \frac{b^2}{2} \cdot x^2 \\ + \frac{b^3}{3} \cdot x - \frac{3b^3}{2 \cdot 3} \cdot x^2 + \frac{b^3}{2 \cdot 3} \cdot x^3 \\ - \frac{b^4}{4} \cdot x + \frac{11 b^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot x^2 - \frac{6 \cdot b^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot x^3 + \frac{b^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot x^4 \\ \quad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \end{array} \right.$$

Das Gesetz, nach welchem die Potenzen von x in dieser Reihe fortschreiten, ist deutlich in die Augen fallend. Auch sieht man, daß der Coefficient $b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} + \frac{b^5}{5} - \ldots\ldots$

des zweiten Gliedes dieser Reihe selbst eine Reihe ist, deren allgemeines Glied $\pm \frac{b^n}{n}$ ist.

Da nun $1 + b = a$, also $b = a - 1$ ist, so ist

$$a^x = \begin{array}{l|l|l|l|l} 1 + (a-1) & x + \frac{(a-1)^2}{2} & x^2 + \frac{b^3}{2.3} & x^3 + \frac{b^4}{2.3.4} & x^4 + \ldots \\ -\frac{(a-1)^2}{2} & -\frac{3(a-1)^3}{2.3} & -\frac{6b^4}{2.3.4} & \cdot & \\ +\frac{(a-1)^3}{3} & +\frac{11.(a-1)^4}{2.3.4} & \cdot & \cdot & \\ -\frac{(a-1)^4}{4} & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \end{array}$$

Man ist also berechtiget, zu setzen

$$a^x = 1 + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots,$$

wo $B, C, D, \ldots$ von x unabhängige Größen bedeuten, die nun noch zu bestimmen sind.

Aus der Vergleichung dieser Gleichung mit der nächstvorhergehenden ergibt sich sogleich, daß

$$B = a-1 - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} + \ldots \text{ ist.}$$

Ferner: da

$$a^x = 1 + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots$$

für jeden Werth des x gilt, so ist auch

$$a^v = 1 + Bv + Cv^2 + Dv^3 + Ev^4 + \ldots\ldots$$

Folglich

$$\begin{array}{llllll} a^x \,.\, a^v = 1 + Bx & + Cx^2 & + Dx^3 & + Ex^4 & + \ldots \\ \quad Bv & + BBxv & + BCx^2v & + BDx^3v & + \ldots \\ & + Cv^2 & + CBxv^2 & + CCx^2v^2 & + \ldots \\ & & + Dv^3 & + DBxv^3 & + \ldots \\ & & & + Ev^4 & + \ldots \end{array}$$

Es ist aber auch $a^x \,.\, a^v = a^{x+v}$, und

$$a^{x+v} = 1 + B(x+v) + C(x+v)^2 + D(x+v)^3 + E(x+v)^4 + \ldots$$

$$
= \left\{ \begin{array}{llllll}
1 + Bx & + Cx^2 & + Dx^3 & + Ex^4 & + \ldots \\
+ Bv & + 2Cxv & + 3Dx^2v & + 4Ex^3v & \\
 & + Cv^2 & + 3Dxv^2 & + 6Ex^2v^2 & \\
 & & + Dv^3 & + 4Exv^3 & \\
 & & & + Ev^4 &
\end{array} \right.
$$

Also auch die hier gefundene Reihe =

$$
\begin{array}{llllll}
1 + Bx & + Cx^2 & + Dx^3 & + Ex^4 & + \ldots \\
+ Bv & + BBxv & + BCx^2v & + BDx^3v & + \ldots \\
 & + Cv^2 & + CBxv^2 & + CCx^2v^2 & + \ldots \\
 & & + Dv^3 & + DBxv^3 & + \ldots \\
 & & & + Ev^4 & + \ldots
\end{array}
$$

Folglich auch

$$
\left. \begin{array}{lllll}
Bv + 2Cxv & + 3Dx^2v & + 4Ex^3v & + \ldots \\
+ Cv^2 & + 3Dxv^2 & + 6Ex^2v^2 & + \ldots \\
 & + Dv^3 & + 4Exv^3 & + \ldots \\
 & & + Ev^4 & + \ldots \\
 & . & . & . \; . \; .
\end{array} \right\} =
$$

$$
= \left\{ \begin{array}{lllll}
Bv + BBxv & + BCx^2v & + BDx^3v & + \ldots \\
+ Cv^2 & + CBxv^2 & + CCx^2v^2 & + \ldots \\
 & + Dv^3 & + DBxv^3 & + \ldots \\
 & & + Ev^4 & + \ldots \\
 & & . \; . & . \; .
\end{array} \right.
$$

Folglich, wenn man auf beiden Seiten durch v dividirt, und alsdann $v = 0$ sezt,

$$B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \ldots = B + BBx + BCx^2 + BDx^3 + \ldots$$

$$
\begin{aligned}
\text{Also ist } B &= B \\
C &= \frac{B^2}{2} \\
D &= \frac{B^3}{2.3} \\
E &= \frac{B^4}{2.3.4} \\
&\;. \; . \; . \; .
\end{aligned}
$$

Folglich

$$a^x = 1 + Bx + \frac{B^2}{2} . x^2 + \frac{B^3}{2.3} x^3 + \frac{B^4}{2.3.4} . x^4 + \ldots,$$

wo $B = a - 1 - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} + \ldots.$ ist.

§. 71. Die Reihe für B ist nur dann convergent, wenn $a - 1$ ein echter Bruch ist. Es läßt sich B auch auf eine andere Art bestimmen.

§. 72. Setzt man in der für a^x gefundenen Reihe $x = 1$, so erhält man

$$a = 1 + B + \frac{B^2}{2} + \frac{B^3}{2.3} + \frac{B^4}{2.3.4} + \ldots.$$

§. 73. Es wird also B durch a, und a durch B bestimmt.

§. 74. Man setze $B = 1$, so erhält man

$$a = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \ldots.$$
$$= 2,7182818\ldots.$$

Dieser bestimmte Werth für a heiße e.

§. 75. Es ist also

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \ldots.$$

Folglich auch, wenn man $x = B$ setzt,

$$e^B = 1 + B + \frac{B^2}{2} + \frac{B^3}{2.3} + \frac{B^4}{2.3.4}$$

Nun ist auch nach §. 72.

$$a = 1 + B + \frac{B^2}{2} + \frac{B^3}{2.3} + \frac{B^4}{2.3.4} + \ldots.$$

Folglich $e^B = a$

und $B . \lg e = \lg a$

$$B = \frac{\lg a}{\lg e}$$

Aus dieser Gleichung läßt sich B immer bestimmen.

§. 76. Setzt man den so eben gefundenen Werth des B in die Gleichung für a^x, so erhält man

$$a^x = 1 + \frac{\lg a}{\lg e} . x + \frac{(\lg a)^2}{2.(\lg e)^2} . x^2 + \frac{(\lg a)^3}{2.3.(\lg e)^3} . x^3 + \frac{(\lg a)^4}{2.3.4.(\lg e)^4} . x^4 + \ldots$$

§. 77. Nimmt man a als die Basis eines logarithmischen Systems an, also lg a = 1, so erhält man

$$a^x = 1 + \frac{x}{\lg e} + \frac{x^2}{2.(\lg e)^2} + \frac{x^3}{2.3.(\lg e)^3} + \frac{x^4}{2.3.4.(\lg e)^4} + \ldots$$

Setzt man, e sey die Basis eines logarithmischen Systems, also lg e = 1, so ist

$$a^x = 1 + \frac{\lg a}{1}.x + \frac{(\lg a)^2}{2}.x^2 + \frac{(\lg a)^3}{2.3}.x^3 + \frac{(\lg a)^4}{2.3.4}.x^4 + \ldots$$

In der Gleichung, für welche lg a = 1 angenommen ist, setze man $a^x = y$, also $x \lg a = \lg y$, oder, weil lg a = 1 ist, $x = \lg y$, so ist

$$y = 1 + \frac{\lg y}{\lg e} + \frac{(\lg y)^2}{2.(\lg e)^2} + \frac{(\lg y)^3}{2.3.(\lg e)^3} + \ldots \text{ (I.)}$$

In der Gleichung, für welche lg e = 1 ist, setze man $a^x = y$, also $x . \lg a = \lg y$, so ist

$$y = 1 + \lg y + \frac{(\lg y)^2}{2} + \frac{(\lg y)^3}{2.3} + \frac{(\lg y)^4}{2.3.4} + \ldots \text{ (II.)}$$

Sowohl die Gleichung I., als die Gleichung II. gibt eine Zahl durch ihren Logarithmen, die Gleichung I., wenn a, und die Gleichung II., wenn e die Basis eines logarithmischen Systems ist.

Jede von den Gleichungen I. und II. kann immer so weit fortgesetzt werden, daß sie convergent wird. Ein Glied $\frac{(\log y)^{n+1}}{2.3\ldots(n+1).(\lg e)^{n+1}}$ der Reihe I. nämlich dividirt durch das nächstvorhergehende $\frac{(\lg y)^n}{2.3\ldots n(\lg e)^n}$ gibt $\frac{\lg y}{(n+1).\lg e}$, und es kann $n + 1$, bei gehöriger Fortsetzung der Reihe, immer so groß werden, daß $\frac{\lg y}{(n+1)\lg e}$ ein sehr kleiner echter Bruch wird. Auf ähnliche Art läßt sich die Wahrheit der Behauptung auch für die Reihe II. darthun.

§. 78. Im Vorhergehenden ist eine Zahl durch ihren Logarithmen ausgedrückt worden; man kann auch einen Logarithmen durch seine Zahl ausdrücken.

§. 79. Aufg. Man soll einen Logarithmen durch seine Zahl ausdrücken.

Aufl. Da $B = a - 1 - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} + \ldots$

und B auch $= \frac{\lg a}{\lg e}$ ist, so hat man zum Ausdruck eines Logarithmen durch seine Zahl

$$\lg a = \lg e . [a - 1 - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} + \ldots]$$

§. 80. Aus der hier gefundenen Gleichung, welche für jedes logarithmische System gilt, da bei ihr kein bestimmtes vorausgesetzt ist, können, obgleich die Reihe auf der rechten Seite derselben nur dann convergent ist, wenn $a - 1$ einen echten Bruch bedeutet, für jedes System Gleichungen hergeleitet werden, in welchen ein Logarithme durch seine Zahl immer vermittelst convergenter Reihen gegeben ist.

§. 81. Es sey zuerst $a = 1 + u$, und dann $a = 1 - u$, so erhält man

$$\lg (1 + u) = \lg e . [u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \ldots]$$

$$\text{und } \lg (1 - u) = \lg e . [- u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \ldots]$$

Aus diesen beiden Gleichungen bekommt man ferner

$$\lg (1 + u) - \lg (1 - u) = \lg e . [2u + \frac{2u^3}{3} + \frac{2u^5}{5} + \ldots]$$

$$\lg \frac{1 + u}{1 - u} = 2 . \lg e . u [1 + \frac{1}{3}u^2 + \frac{1}{5}u^4 + \ldots]$$

Nun bedeute N eine bejahte Zahl, und man setze

$$\frac{1 + u}{1 - u} = N,$$

$$\text{also } 1 + u = N - Nu$$

$$Nu + u = N - 1$$

$$(N + 1)u = N - 1$$

$$u = \frac{N - 1}{N + 1},$$

so erhält man

$$\lg N = 2 \lg e . \frac{N - 1}{N + 1} . \left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{N - 1}{N + 1}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{N - 1}{N + 1}\right)^4 + \ldots\right]$$

Die Reihe in der hier gefundenen Gleichung ist immer convergent, freilich für große Zahlen nicht sehr.

§. 82. Daß die so eben für lg N gefundene Reihe an Convergenz abnimmt, wie N wächst, läßt sich genügend an einem Beispiel zeigen. Es sey zuerst N = 10, und dann N = 100, so ist im ersten Fall $\frac{N-1}{N+1} = \frac{9}{11}$, und im zweiten $\frac{N-1}{N+1} = \frac{99}{101}$. Es ist aber $\frac{99}{101} > \frac{9}{11}$.

§. 83. Aus der Gleichung für lg N erhält man

$$\lg e = \frac{\lg N}{2 \cdot \frac{N-1}{N+1} \cdot \left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{N-1}{N+1}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{N-1}{N+1}\right)^4 + \ldots\right]}$$

Man setze N sey die Basis eines logarithmischen Systems, also lg N = 1, so ist

$$\lg e = \frac{1}{2 \cdot \frac{N-1}{N+1} \cdot \left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{N-1}{N+1}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{N-1}{N+1}\right)^4 + \ldots\right]}$$

Ist die Basis N = 10, so findet man

$$\lg e = 0,43429448190325 \ldots$$

§. 84. Für die Basis = 10, d. i. für die gemeinen oder briggischen Logarithmen, wird also die allgemeine, für jedes logarithmische System geltende, Formel (§. 81.) zu

$$\lg N = 2 . 0,4342944 \ldots \frac{N-1}{N+1} \cdot \left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{N-1}{N+1}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{N-1}{N+1}\right)^4 + \ldots\right]$$

§. 85. Für eine andere Basis würde lg e eine andere Zahl, als 0,4342944 ...., seyn, oder man würde für eine andere Basis die Größe

$$2 \cdot \frac{N-1}{N+1} \cdot \left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{N-1}{N+1}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{N-1}{N+1}\right)^4 + \ldots\right]$$

mit einer andern Zahl, als 0,4342944 .... multipliciren müssen, um lg N zu erhalten.

§. 86. Erkl. Lg e heißt der Modulus (Subtangente), der also für jedes besondere logarithmische System anders ist.

§. 87. Erkl. Das logarithmische System, dessen Modulus = 1 ist, heißt das natürliche (naturalis), jedes andere ein künstliches (artificialis).

Für das natürliche logarithmische System ist also

$$\lg N = 2 . \frac{N-1}{N+1} . \left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{N-1}{N+1}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{N-1}{N+1}\right)^4 + \ldots\right]$$

§. 88. Man findet aus dem natürlichen Logarithmen einer Zahl den künstlichen Logarithmen derselben Zahl, wenn man den natürlichen Logarithmen dieser Zahl mit dem Modulus des Systems multiplicirt, zu welchem der künstliche Logarithme gehören soll.

Oder bezeichnet man den Modulus mit M, so ist

$$\text{lg. art. } N = M . \text{ lg. nat. } N$$

§. 89. Also ist auch

$$\text{lg. nat. } N = \frac{\text{lg. art. } N}{M}$$

§. 90. Für die briggischen Logarithmen ist

$$\text{lg. art. } N = 0{,}432494 \ldots . \text{ lg. nat. } N$$

$$\text{und lg. nat. } N = \frac{\text{lg. art. } N}{0{,}432494 \ldots}$$

§. 91. Aus $\text{lg. art. } N = M . \text{ lg. nat. } N$, folgt

$$1 : M = \text{lg. nat. } N : \text{lg. art } N,$$

d. h. der natürliche und der künstliche Logarithme einer und derselben Zahl verhalten sich, wie die Modulus ihrer Systeme.

Ueberhaupt verhalten sich einer und derselben Zahl Logarithmen in zwei Systemen, wie die Modulus dieser Systeme. Denn es sey

Modulus eines Systems = M

eines andern Systems = M′

Logarithme einer Zahl N im ersten System = v

Logarithme der Zahl N im zweiten System = w,

so ist $v = M . \text{ lg. nat. } N$, und $w = M' . \text{ lg. nat. } N$

Also $v : w = M : M'$.

§. 92. Es ist früher gezeigt worden, daß in der Gleichung

$$\lg N = 2 . \lg e . \left[\frac{N-1}{N+1} + \frac{1}{3} . \left(\frac{N-1}{N+1}\right)^3 + \frac{1}{5} . \left(\frac{N-1}{N+1}\right)^5 + \ldots\right]$$

die auf der rechten Seite befindliche Reihe an Convergenz ab-

nimmt, wie N wächst. Eine sehr convergente Reihe, auch für große Zahlen, erhält man, wenn man das

$\frac{1+u}{1-u}$ in (§. 81.) $= 1 + \frac{Z}{N}$ setzt,

also $1 + u = 1 + \frac{Z}{N} - u - \frac{Zu}{N}$

$$2u + \frac{Zu}{N} = \frac{Z}{N}$$

$$u\left(2 + \frac{Z}{N}\right) = \frac{Z}{N}$$

$$u\left(\frac{2N+Z}{N}\right) = \frac{Z}{N}$$

und $u = \frac{Z}{2N+Z}$

Man bekommt hierdurch, $\lg e = M$ gesetzt,

$$\lg\left(\frac{N+Z}{N}\right) = \lg(N+Z) - \lg N =,$$

$$2 \cdot M\left[\frac{Z}{2N+Z} + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{Z}{2N+Z}\right)^3 + \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{Z}{2N+Z}\right)^5 + \ldots\right]$$

und $\lg(N+Z)$

$$= \lg N + 2M\cdot\left[\frac{Z}{2N+Z} + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{Z}{2N+Z}\right)^3 + \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{Z}{2N+Z}\right)^5 + \ldots\right]$$

und, für $Z = 1$, $\lg(N+1) =$

$$\lg N + 2M\cdot\left[\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2N+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2N+1}\right)^5 + \ldots\right]$$

Setzt man in der Formel für $\lg(N+1)$ für N die Zahlen 1, 2, 3, 4, ..., so gibt der eingeklammerte Faktor $\left[\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2N+1}\right)^3 + \ldots\right]$ immer eine sehr convergente Reihe, und eine desto convergentere, je größer die für N gesetzte Zahl ist.

§. 93. Der Formel für $\lg(N+Z)$ kann man sich vortheilhaft bedienen, die Logarithmen solcher Zahlen zu finden, die außer den Grenzen einer Tafel liegen. Eine Tafel enthalte nicht die Logarithmen der Zahlen über 10000. Soll man nun z. B. den zu 128539 gehörigen Logarithmen finden, so zerlege

man 128539 in 128500 + 39, und setze N = 128500, und Z = 39.

B. Verwandlung der Kreisfunktionen in Reihen.

§. 94. Nach trigonometrischen Gründen ist für den Kreishalbmesser = 1

$$\mathrm{Cos}\,A^2 + \mathrm{Sin}\,A^2 = 1$$

$$\mathrm{Sin}\,(A \pm B) = \mathrm{Sin}\,A\,.\,\mathrm{Cos}\,B \pm \mathrm{Cos}\,A\,.\,\mathrm{Sin}\,B.$$

$$\mathrm{Cos}\,(A \pm B) = \mathrm{Cos}\,A\,.\,\mathrm{Cos}\,B \mp \mathrm{Sin}\,A\,.\,\mathrm{Sin}\,B.$$

Die Größe $\mathrm{Cos}\,A^2 + \mathrm{Sin}\,A^2$ läßt sich in die beiden unmöglichen Faktoren

$$\mathrm{Cos}\,A + \mathrm{Sin}\,A\,.\,\sqrt{-1}$$

$$\text{und } \mathrm{Cos}\,A - \mathrm{Sin}\,A\,.\,\sqrt{-1}$$

zerlegen. Man kann sich hiervon überzeugen, wenn man diese beiden Größen wirklich in einander multiplicirt. Es ist also

$$(\mathrm{Cos}\,A + \mathrm{Sin}\,A\,.\,\sqrt{-1})(\mathrm{Cos}\,A - \mathrm{Sin}\,A\,.\,\sqrt{-1}) = 1.$$

Multiplicirt man die beiden ähnlichen Größen $\mathrm{Cos}\,A + \mathrm{Sin}\,A\,.\,\sqrt{-1}$, und $\mathrm{Cos}\,B + \mathrm{Sin}\,B\,.\,\sqrt{-1}$ in einander, so erhält man

$$(\mathrm{Cos}\,A + \mathrm{Sin}\,A\,.\,\sqrt{-1})(\mathrm{Cos}\,B + \mathrm{Sin}\,B\,.\,\sqrt{-1}) =$$
$$\mathrm{Cos}\,A\,.\,\mathrm{Cos}\,B - \mathrm{Sin}\,A\,.\,\mathrm{Sin}\,B + (\mathrm{Sin}\,A\,.\,\mathrm{Cos}\,B + \mathrm{Cos}\,A\,.\,\mathrm{Sin}\,B)\,.\,\sqrt{-1}$$
$$= \mathrm{Cos}\,(A + B) + \mathrm{Sin}\,(A + B)\,.\,\sqrt{-1}$$

§. 95. **Lehrsatz.** Es ist

$$(\mathrm{Cos}\,A + \mathrm{Sin}\,A\,.\,\sqrt{-1})^n = \mathrm{Cos}\,nA + \mathrm{Sin}\,nA\,.\,\sqrt{-1}$$

$$\text{u. } (\mathrm{Cos}\,A - \mathrm{Sin}\,A\,.\,\sqrt{-1})^n = \mathrm{Cos}\,nA - \mathrm{Sin}\,nA\,.\,\sqrt{-1},$$

wo n eine bejahte ganze Zahl bedeutet.

Bew. Da

$$(\mathrm{Cos}\,A + \mathrm{Sin}\,A\,.\,\sqrt{-1})(\mathrm{Cos}\,B + \mathrm{Sin}\,B\,.\,\sqrt{-1}) =$$

$\mathrm{Cos}\,(A + B) + \mathrm{Sin}\,(A + B)\,.\,\sqrt{-1}$ ist, so ist

für $B = A$, $(\mathrm{Cos}\,A + \mathrm{Sin}\,A\,.\,\sqrt{-1})(\mathrm{Cos}\,A + \mathrm{Sin}\,A\,.\,\sqrt{-1})$

$$= \mathrm{Cos}\,2A + \mathrm{Sin}\,2A\,.\,\sqrt{-1}$$

$= 2A, (\text{Cos}\,A + \text{Sin}\,A . \sqrt{-1})(\text{Cos}\,2A + \text{Sin}\,2A . \sqrt{-1})$
$= \text{Cos}\,3A + \text{Sin}\,3A . \sqrt{-1}$
$= 3A, (\text{Cos}\,A + \text{Sin}\,A . \sqrt{-1})(\text{Cos}\,3A + \text{Sin}\,3A . \sqrt{-1})$
$= \text{Cos}\,4A + \text{Sin}\,4A . \sqrt{-1}$
. . . .

Aus diesen Gleichungen ergibt sich

$(\text{Cos}\,A + \text{Sin}\,A . \sqrt{-1})^2 = \text{Cos}\,2A + \text{Sin}\,2A\ \sqrt{-1}$
$(\text{Cos}\,A + \text{Sin}\,A . \sqrt{-1})^3 = \text{Cos}\,3A + \text{Sin}\,3A . \sqrt{-1}$
$(\text{Cos}\,A + \text{Sin}\,A . \sqrt{-1})^4 = \text{Cos}\,4A + \text{Sin}\,4A . \sqrt{-1}$
. . . .
$(\text{Cos}\,A + \text{Sin}\,A . \sqrt{-1})^n = \text{Cos}\,nA + \text{Sin}\,nA . \sqrt{-1}$

Setzt man in den beiden Größen

$\text{Cos}\,A + \text{Sin}\,A . \sqrt{-1}$
$\text{Cos}\,B + \text{Sin}\,B . \sqrt{-1}$

$\sqrt{-1}$ verneint, d. i. $-\sqrt{-1}$ statt $+\sqrt{-1}$, so verwandeln sie sich in

$\text{Cos}\,A - \text{Sin}\,A . \sqrt{-1}$
$\text{Cos}\,B - \text{Sin}\,B . \sqrt{-1}$

und die Gleichung

$(\text{Cos}\,A + \text{Sin}\,A . \sqrt{-1})^n = \text{Cos}\,nA + \text{Sin}\,nA . \sqrt{-1}$
in $(\text{Cos}\,A - \text{Sin}\,A . \sqrt{-1})^n = \text{Cos}\,nA - \text{Sin}\,nA . \sqrt{-1}$

Man hat also, wenn n eine bejahte ganze Zahl bedeutet,

$(\text{Cos}\,A + \text{Sin}\,A . \sqrt{-1})^n = \text{Cos}\,nA + \text{Sin}\,nA . \sqrt{-1}$
u. $(\text{Cos}\,A - \text{Sin}\,A . \sqrt{-1})^n = \text{Cos}\,nA - \text{Sin}\,nA . \sqrt{-1}$

§. 96. Aufg. Man soll den Cosinus und Sinus eines vielfachen Bogens durch den Cosinus und Sinus des einfachen ausdrücken.

Aufl. Da

$\text{Cos}\,nA + \text{Sin}\,nA . \sqrt{-1} = (\text{Cos}\,A + \text{Sin}\,A . \sqrt{-1})^n$
u. $\text{Cos}\,nA - \text{Sin}\,nA . \sqrt{-1} = (\text{Cos}\,A - \text{Sin}\,A . \sqrt{-1})^n$,

so ist

$2 . \text{Cos}\,nA = (\text{Cos}\,A + \text{Sin}\,A . \sqrt{-1})^n + (\text{Cos}\,A - \text{Sin}\,A . \sqrt{-1})^n$
u. $2 . \text{Sin}\,nA = \frac{(\text{Cos}\,A + \text{Sin}\,A . \sqrt{-1})^n - (\text{Cos}\,A - \text{Sin}\,A . \sqrt{-1})^n}{\sqrt{-1}}$

Hier könnte man nun die Ausdrücke für $2 \cdot \text{Cos}\, nA$ und $2 \cdot \text{Sin}\, nA$ nach dem binomischen Satze entwickeln. Es würde sich bei dieser Entwicklung zeigen, daß sich das Unmögliche aufhebt.

Kürzer gelangt man aber zu der Auflösung der Aufgabe auf folgende Art.

Nach dem binomischen Lehrsatze ist

$$(\text{Cos}\, A + \text{Sin}\, A \cdot \sqrt{-1})^n = \text{Cos}\, A^n + n \cdot \text{Cos}\, A^{n-1} \cdot \text{Sin}\, A \sqrt{-1}$$
$$- \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \text{Cos}\, A^{n-2} \cdot \text{Sin}\, A^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \text{Cos}\, A^{n-3} \cdot \text{Sin}\, A^3 \cdot \sqrt{-1}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \text{Cos}\, A^{n-4} \cdot \text{Sin}\, A^4 + \ldots$$

Die Reihe auf der rechten Seite ist also auch $= \text{Cos}\, nA + \text{Sin}\, nA \cdot \sqrt{-1}$.

Man kann sich die erwähnte Reihe bestehend denken aus einer möglichen Größe, welche die Summe aller ihrer möglichen Glieder ist, und aus einer unmöglichen, welche aus der Summe aller ihrer unmöglichen Glieder entspringt und als ein Produkt aus einer möglichen Größe in die unmögliche $\sqrt{-1}$ anzusehen ist.

Da nun jene mögliche Größe nur einer möglichen und diese unmögliche nur einer unmöglichen Größe gleich seyn kann, so hat man

$$\text{Cos}\, nA = \text{Cos}\, A^n - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \text{Cos}\, A^{n-2} \cdot \text{Sin}\, A^2$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \text{Cos}\, A^{n-4} \cdot \text{Sin}\, A^4 + \ldots$$

und $\text{Sin}\, nA \cdot \sqrt{-1} = n \cdot \text{Cos}\, A^{n-1} \cdot \text{Sin}\, A \cdot \sqrt{-1}$

$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \text{Cos}\, A^{n-3} \cdot \text{Sin}\, A^3 \cdot \sqrt{-1}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \text{Cos}\, A^{n-5} \cdot \text{Sin}\, A^5 \cdot \sqrt{-1} + \ldots$$

oder

$$\text{Sin}\, nA = n \cdot \text{Cos}\, A^{n-1} \cdot \text{Sin}\, A - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \text{Cos}\, A^{n-3} \cdot \text{Sin}\, A^3$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \text{Cos}\, A^{n-5} \cdot \text{Sin}\, A^5 + \ldots$$

§. 97. Es ist Cos A : Sin A = 1 : tg A, also Sin A = Cos A . tg A.

Durch Setzung dieses Werthes von Sin A in die Reihen für Cos nA und Sin nA bekommt man

$$\text{Cos}\, nA = \text{Cos}\, A^n - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \text{Cos}\, A^{n-2} \cdot \text{Cos}\, A^2 \cdot \text{tg}\, A^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \text{Cos}\, A^{n-4} \cdot \text{Cos}\, A^4 \cdot \text{tg}\, A^4 - \ldots$$

$$\text{Sin}\, nA = n \cdot \text{Cos}\, A^{n-1} \cdot \text{Cos}\, A \cdot \text{tg} A - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \text{Cos}\, A^{n-3} \cdot \text{Cos}\, A^3 \cdot \text{tg}\, A^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \text{Cos}\, A^{n-5} \cdot \text{Cos}\, A^5 \cdot \text{tg}\, A^5 + \ldots$$

oder

$$\text{Cos}\, nA = \text{Cos}\, A^n \cdot \left[1 - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \text{tg} A^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \text{tg} A^4 - \ldots\right]$$

und

$$\text{Sin}\, nA = \text{Cos}\, A^n \cdot \left[n \cdot \text{tg}\, A - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \text{tg}\, A^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \text{tg}\, A^5 - \ldots\right]$$

§. 98. Aufg. Man soll sowohl den Cosinus, als den Sinus durch seinen Bogen, den man sich hier in Theilen des Kreishalbmessers gegeben denkt, ausdrücken.

Aufl. In den zuletzt gefundenen Gleichungen setze man $nA = x$, also $n = \frac{x}{A}$, wo A, also auch x jeden beliebigen Kreisbogen bedeutet.

Hierdurch bekommt man

$$\text{Cos}\, x = \text{Cos}\, A^n \left[1 - \frac{\frac{x}{A}\left(\frac{x}{A} - 1\right)}{1 \cdot 2} \cdot \text{tg}\, A^2 + \frac{\frac{x}{A}\left(\frac{x}{A} - 1\right)\left(\frac{x}{A} - 2\right)\left(\frac{x}{A} - 3\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \text{tg}\, A^4 - \ldots\right]$$

$$\text{Sin}\,x = \text{Cos}\,A^n \left[\frac{x}{1} \cdot \frac{\text{tg}A}{A} - \frac{\frac{x}{A}\left(\frac{x}{A}-1\right)\left(\frac{x}{A}-2\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \text{tg}\,A^3 + \frac{\frac{x}{A}\left(\frac{x}{A}-1\right)\left(\frac{x}{A}-2\right)\left(\frac{x}{A}-3\right)\left(\frac{x}{A}-4\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \text{tg}\,A^5 - \ldots \right]$$

oder

$$\text{Cos}\,x = \text{Cos}\,A^n \left[1 - \frac{x(x-A)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\text{tg}\,A^2}{A^2} + \frac{x(x-A)(x-2A)(x-3A)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{\text{tg}\,A^4}{A^4} - \ldots \right]$$

und

$$\text{Sin}\,x = \text{Cos}\,A^n \left[\frac{x}{1} \cdot \frac{\text{tg}\,A}{A} - \frac{x(x-A)(x-2A)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{\text{tg}\,A^3}{A^3} + \frac{x(x-A)(x-2A)(x-3A)(x-4A)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{\text{tg}\,A^5}{A^5} + \ldots \right]$$

Man kann hier den Bogen A beliebig annehmen. Man nehme also an, A sey sehr klein. Dann ist $\frac{\text{tg}\,A}{A}$ sehr wenig von der Einheit unterschieden, da sich ein sehr kleiner Kreisbogen sehr wenig von seiner Tangente unterscheidet. So lange indessen A nicht $= 0$ ist, so lange ist $\text{tg}\,A > A$, und also $\frac{\text{tg}\,A}{A} > 1$. Ferner ist $A > \text{Sin}\,A$, also $\frac{\text{tg}\,A}{A} < \left(\frac{\text{tg}\,A}{\text{Sin}\,A} = \frac{1}{\text{Cos}\,A}\right)$. Man hat also

$$\frac{\text{tg}\,A}{A} < \frac{1}{\text{Cos}\,A}$$

$$\text{und} \quad \frac{\text{tg}\,A}{A} > 1,$$

oder die Größe $\frac{\text{tg}\,A}{A}$ liegt immer zwischen den Grenzen $\frac{1}{\text{Cos}\,A}$ und 1. Nun kommt aber Cos A, also auch $\frac{1}{\text{Cos}\,A}$ der Einheit desto näher, je kleiner A angenommen wird. Für $A = 0$ ist Cos A und also auch $\frac{1}{\text{Cos}\,A} = 1$. Also ist für $A = 0$, $\frac{\text{tg}\,A}{A} = 1$.

Da endlich für $A = 0$, $\text{Cos}\, A = +1$ ist, so ist auch $\text{Cos}\, A^n = +1$.

Folglich ist für $A = 0$

$$\text{Cos}\, x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots$$

$$\text{und Sin}\, x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots$$

§. 99. Bedeutet e die Basis des natürlichen Logarithmensystems, so ist (§. 75.)

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4} + \ldots$$

Man setze in dieser Gleichung statt z zuerst $x.\sqrt{-1}$, und dann $-x\sqrt{-1}$. Dadurch bekommt man

$$e^{x\sqrt{-1}} = 1 + \frac{x\sqrt{-1}}{1} - \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3.\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots$$

$$e^{-x\sqrt{-1}} = 1 - \frac{x\sqrt{-1}}{1} - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3.\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^5.\sqrt{-1}}{1.2.3.4.5} - \ldots$$

Folglich ist

$$e^{x.\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}} = 2.1 - \frac{2.x^2}{1.2} + \frac{2.x^4}{1.2.3.4} - \ldots$$

und

$$e^{x.\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}} = \frac{2.x.\sqrt{-1}}{1} - \frac{2x^3.\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{2.x^5.\sqrt{-1}}{1.2.3.4.5} - \ldots$$

Also

$$\frac{e^{x.\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2} = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots$$

und

$$\frac{e^{x.\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2.\sqrt{-1}} = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots$$

Aus der Vergleichung der beiden hier zuletzt gefundenen Reihen mit den §. 98. für $\text{Sin}\, x$ und $\text{Cos}\, x$ erhaltenen geht hervor:

$$\text{Sin}\, x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x.\sqrt{-1}}}{2.\sqrt{-1}} \quad (\text{A.})$$

$$\text{und Cos}\, x = \frac{e^{x.\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2} \quad (\text{B.})$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich

$$\text{Cos}\, x + \text{Sin}\, x \,.\, \sqrt{-1} = e^{x \cdot \sqrt{-1}} \text{ (C.)}$$

und $$\text{Cos}\, x - \text{Sin}\, x \,.\, \sqrt{-1} = e^{-x \cdot \sqrt{-1}} \text{ (D.)}$$

In den Gleichungen A und B setze man nx statt x, und die Gleichungen C und D erhebe man auf die $n$te Potenz. Man erhält hierdurch

$$\text{Sin}\, nx = \frac{e^{nx \cdot \sqrt{-1}} - e^{-nx \sqrt{-1}}}{2 \cdot \sqrt{-1}}$$

$$\text{Cos}\, nx = \frac{e^{nx \cdot \sqrt{-1}} + e^{-nx \cdot \sqrt{-1}}}{2}$$

$$e^{nx \cdot \sqrt{-1}} = (\text{Cos}\, x + \text{Sin}\, x \,.\, \sqrt{-1})^n$$

$$e^{-nx \cdot \sqrt{-1}} = (\text{Cos}\, x - \text{Sin}\, x \,.\, \sqrt{-1})^n$$

Also ist

$$\text{Sin}\, nx = \frac{(\text{Cos}\, x + \text{Sin}\, x . \sqrt{-1})^n - (\text{Cos}\, x - \text{Sin}\, x . \sqrt{-1})^n}{2 \cdot \sqrt{-1}}$$

$$\text{Cos}\, nx = \frac{(\text{Cos}\, x + \text{Sin}\, x . \sqrt{-1})^n + (\text{Cos}\, x - \text{Sin}\, x . \sqrt{-1})^n}{2},$$

oder, wenn man anstatt x, A setzt,

$$2 . \text{Sin}\, nA = \frac{(\text{Cos} A + \text{Sin} A . \sqrt{-1})^n - (\text{Cos}\, A - \text{Sin} A . \sqrt{-1})^n}{\sqrt{-1}}$$

$$2 . \text{Cos}\, nA = (\text{Cos} A + \text{Sin} A . \sqrt{-1})^n + (\text{Cos}\, A - \text{Sin}\, A . \sqrt{-1})^n$$

Diese Ausdrücke leiten, da n jede beliebige Zahl bedeutet, auf eine Verallgemeinerung der Aufgabe §. 96.

§. 100. Aufg. Man soll einen Kreisbogen durch seine Tangente ausdrücken.

Aufl. Aus den beiden Gleichungen C und D (§. 99.) erhält man, wenn man die Logarithmen nimmt,

$$x \,.\, \sqrt{-1} = \lg (\text{Cos}\, x + \text{Sin}\, x \,.\, \sqrt{-1})$$

$$-x \,.\, \sqrt{-1} = \lg (\text{Cos}\, x - \text{Sin}\, x \,.\, \sqrt{-1})$$

Also ist auch

$$2x . \sqrt{-1} = \lg(\text{Cos}\, x + \text{Sin}\, x . \sqrt{-1}) - \lg(\text{Cos}\, x - \text{Sin}\, x . \sqrt{-1})$$

oder

$$2x \,.\, \sqrt{-1} = \lg \frac{\text{Cos}\, x + \text{Sin}\, x \,.\, \sqrt{-1}}{\text{Cos}\, x - \text{Sin}\, x \,.\, \sqrt{-1}}$$

$$= \lg \frac{1 + \frac{\text{Sin}\, x}{\text{Cos}\, x} \cdot \sqrt{-1}}{1 - \frac{\text{Sin}\, x}{\text{Cos}\, x} \cdot \sqrt{-1}}$$

$$= \lg \frac{1 + \text{Tg}\, x \cdot \sqrt{-1}}{1 - \text{Tg}\, x \cdot \sqrt{-1}}$$

Es sey $\text{Tg}\, x \cdot \sqrt{-1} = v$, so ist

$$2 \cdot x \cdot \sqrt{-1} = \lg \frac{1+v}{1-v},$$

oder, wenn man $\lg \frac{1+v}{1-v}$ entwickelt,

$$2 \cdot x \cdot \sqrt{-1} = 2 \cdot \left[v + \frac{v^3}{3} + \frac{v^5}{5} + \frac{v^7}{7} + \ldots \right] \text{ (§. 81. §. 87.)}$$

Hieraus erhält man, wenn für v sein Werth gesetzt wird,

$$2 \cdot x \cdot \sqrt{-1} = 2 \cdot \left[\text{Tg}\, x \cdot \sqrt{-1} - \frac{\text{Tg}\, x^3 \cdot \sqrt{-1}}{3} + \frac{\text{Tg}\, x^5 \cdot \sqrt{-1}}{5} - \frac{\text{Tg}\, x^7 \cdot \sqrt{-1}}{7} + \ldots \right]$$

Durch die Division dieser Gleichung auf beiden Seiten durch $2 \cdot \sqrt{-1}$ bekommt man

$$x = \text{Tg}\, x - \frac{\text{Tg}\, x^3}{3} + \frac{\text{Tg}\, x^5}{5} - \frac{\text{Tg}\, x^7}{7} + \ldots.$$

§. 101. Diese für x gefundene Formel läßt sich anwenden, das Verhältniß des Kreishalbmessers zum Halbkreise auf eine leichte Art zu berechnen.

Für den Halbmesser = 1 ist $\text{Sin}\, 30^0 = \frac{1}{2}$, also $\text{Cos}\, 30^0 = \sqrt{(1 - \frac{1}{4})} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, und $\text{Tg}\, 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Folglich Bogen von 30^0 =

$$\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}} + \frac{1}{5 \cdot 3^2 \cdot \sqrt{3}} - \frac{1}{7 \cdot 3^3 \cdot \sqrt{3}} + \ldots$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left[1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \ldots \right]$$

Also Bogen von 180^0 =

$$\frac{6}{\sqrt{3}} \cdot \left[1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \ldots \right]$$

$$= \sqrt{12} \cdot \left[1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \ldots\right]$$

$$= 3{,}464101615138 \ldots \left[1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \ldots\right]$$

$$= 3{,}14159265359 \ldots$$

§. 102. Da für Halbmesser $= 1$

Bogen von $180^0 = 3{,}14159265359 \ldots$,

so ist Bogen von $1^0 = 0{,}01745329252 \ldots$

$1' = 0{,}00029088820 \ldots$

$1'' = 0{,}00000484813 \ldots$

Hieraus kann man den Bogen für jede Anzahl von Graden, Minuten ꝛc. in Theilen des Halbmessers finden.

§. 103. **Aufg.** Einen Kreisbogen durch seinen Sinus auszudrücken.

Aufl. Es sey $\text{Sin}\, x = y$ und $\text{Tg}\, x = t$, so ist

$$t = \frac{y}{\sqrt{(1-y^2)}} = y \cdot (1-y^2)^{-\frac{1}{2}}$$

und $x = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + \frac{1}{9}t^9 - \ldots$

Durch Entwicklung vermittelst des binomischen Satzes erhält man

$$t = y + \frac{1}{2}y^3 + \frac{1.3}{1.2.4} \cdot y^5 + \frac{1.3.5}{1.2.4.8} \cdot y^7 + \frac{1.3.5.7}{1.2.3.4.16} y^9 + \ldots$$

$$-\frac{1}{3}t^3 = -\frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{1.2}y^5 - \frac{1.5}{1.2.4} \cdot y^7 - \frac{1.5.7}{1.2.3.8} y^9 - \ldots$$

$$+\frac{1}{5}t^5 = +\frac{1}{5}y^5 + \frac{1}{1.2} \cdot y^7 + \frac{1.7}{1.2.4} y^9 + \ldots$$

$$-\frac{1}{7}t^7 = -\frac{1}{7}y^7 - \frac{1}{1.2}y^9 - \ldots$$

$$+\frac{1}{9}t^9 = +\frac{1}{9}y^9 + \ldots$$

.
.
.

Also ist

$$x = y + \frac{1}{2.3}y^3 + \frac{1.3}{2.4.5}y^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}y^7 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9}y^9 + \ldots$$

§. 104. Den Bogen einer trigonometrischen Linie deute man dadurch an, daß man arc. (arcus) vor die Linie schreibe, z. B. den Bogen des Sinus y durch arc. Sin y. Nach dieser Bezeichnungsart ist also

$$\text{arc. Sin}\, y = y + \frac{y^3}{2.3} + \frac{3.y^5}{2.4.5} + \ldots$$

§. 105. Aufg. Man soll einen Kreisbogen durch seinen Cosinus ausdrücken.

Aufl. Bedeutet n die halbe Kreisperipherie für den Halbmesser = 1, so ist $\frac{1}{2}n - x$ der Bogen, zu welchem y als Cosinus gehört. Setzt man nun y = z, und $\frac{1}{2}n - x =$ arc. Cos z, so hat man, da $x = y + \frac{y^3}{2.3} + \frac{3.y^5}{2.4.5} + \frac{3.5.y^7}{2.4.6.7} + \ldots$ ist, für den Ausdruck eines Kreisbogens durch seinen Cosinus

$$\text{arc. Cos}\, z = \tfrac{1}{2}n - z - \frac{z^3}{2.3} - \frac{3.z^5}{2.4.5} - \frac{3.5.z^7}{2.4.6.7} - \ldots$$

III. Entwicklung ungesonderter Funktionen.

§. 106. In einer ungesonderten Funktion zwischen zwei veränderlichen Größen x und y, z. B. in der Funktion

$$ay^3 + bx^2y + cy^2 + dy + ex + f = 0$$

kann man x andere und andere Werthe beilegen. So wie sich der Werth von x aber ändert, so müssen auch die Werthe von y Veränderungen erleiden. Die Größe y kann also als eine Funktion von x gedacht werden, und umgekehrt.

§. 107. Ist die ungesonderte Funktion eine Gleichung vom zweiten Grad, z. B.

$$y^2 + axy + bx^2 + cy + dx + e = 0,$$

so kann man sie dadurch zu einer gesonderten machen, daß man sie, die eine von den Größen x und y, z. B. y als die

gesuchte Größe betrachtend, als eine quadratische Gleichung auflöset.

Man erhält durch Auflösung der als Beispiel gegebenen Gleichung

$$y = -\frac{ax+c}{2} \pm \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{[c^2 - 4e + (2ac - 4d)x + (a^2 - 4b)x^2]}$$

§. 108. Die Größe unter dem Wurzelzeichen läßt sich mit Hülfe des polynomischen Lehrsatzes in eine Reihe verwandeln. Also kann man y durch x vermittelst einer Reihe darstellen. Die Form dieser Reihe ist nach §. 63.

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$$

§. 109. Man kann den Werth für y auch auf folgende Art in einer Reihe finden, die nach den Potenzen von x fortschreitet.

Man setze

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$$

und substituire den für y angenommenen Werth in die Gleichung

$$y^2 + axy + bx^2 + cy + dx + e = 0.$$

Hierdurch erhält man

$$\left.\begin{array}{l} y^2 \\ +axy \\ +bx^2 \\ +cy \\ +dx \\ +e \end{array}\right| = \left|\begin{array}{lllll} A^2 + 2ABx + & (2AC+B^2)x^2 + & & (2AD+2BC)x^3 + \ldots & (I.) \\ \quad + aAx + & aBx^2 + & & aCx^3 + \ldots & (II.) \\ & + & bx^2 & & \\ cA + cBx & + & cCx^2 & + cDx^3 + \ldots & (III.) \\ \quad + dx & & & & \\ e & & & & \end{array}\right.$$

Alles, was auf der rechten Seite dieser Gleichung in einerlei Potenz von x multiplicirt ist, macht zusammen Einen Coefficienten aus. Man kann das, was auf der rechten Seite steht, kürzer auch so schreiben

$$\begin{array}{l|l|l|l} A^2 + 2AB & x + (2AC + B^2) & x^2 + (2AD + 2BC) & x^3 + \ldots \\ \quad\quad\; aA & \quad\quad + aB & + aC & \\ & \quad\quad + b & & \\ cA \;\; + cB & \quad\quad + cC & + cD & \\ \quad\quad + d & & & \\ + e & & & \end{array}$$

Die Reihe, welche man hier hat, muß, da sie der gegebenen Funktion gleich seyn soll, $= 0$ seyn. Auch muß, da sie für jeden Werth von x, $= 0$ seyn soll, jeder Coefficient $= 0$ seyn. Also ist

1) $A^2 + cA + e = 0$; folglich $A = -\frac{c}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(c^2 - 4e)}$

2) $2AB + aA + cB + d = 0$; also $B = -\frac{(aA + d)}{2A + c}$

3) $2AC + B^2 + aB + b + cC = 0$; also $C = -\frac{(B^2 + aB + b)}{2A + c}$

u. s. w.

Da man 1) $A = -\frac{1}{2}c + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(c^2 - 4e)}$ und
2) $A = -\frac{1}{2}c - \frac{1}{2}\sqrt{(c^2 - 4e)}$ hat, so bekommt man zwei Reihen von Coefficienten. Jede derselben gibt eine Reihe für y. Die Größe y muß aber auch zwei Werthe erhalten, da sie eine Wurzel der gegebenen quadratischen Gleichung ist.

§. 110. Auf ähnliche Art läßt sich auch in solchen ungesonderten Funktionen zwischen zwei veränderlichen Größen, welche als Gleichungen vom dritten, vierten und von höhern Graden betrachtet werden können, die eine veränderliche Größe y durch Reihen ausdrücken, welche nach den Potenzen von x fortschreiten. Die Schwierigkeit hierbei besteht in der Bestimmung der Gestalt der für y anzunehmenden Reihe.

§. 111. Man kann die Reihen, welche y durch x geben sollen, allgemein durch $Ax^m + Bx^{m+d} + Cx^{m+2d} + \ldots$ darstellen. Für steigende Reihen ist d bejaht; für fallende, verneint. Bei Reihen, in welchen die Exponenten von x nicht nach einer arithmetischen Reihe fortschreiten, kann man sich diese Exponenten doch als Glieder einer arithmetischen Reihe, in welcher aber Glieder fehlen, vorstellen. In dem letztern Falle sind Coefficienten der für y angenommenen Reihe Null.

§. 112. Denkt man sich die Glieder der zwischen x und y gegebenen Gleichung, die kein y enthalten, mit y^0 multiplicirt und setzt die für y angenommene Reihe in diese Glei-

chung, so entsteht aus jedem Gliede der letztern eine Reihe, eine Particularreihe.

§. 113. Alle Particularreihen müssen, wenn die Coefficienten der für y gesetzten Reihe sollen bestimmt werden können, zusammen eine einzige Reihe, eine Totalreihe, geben. Diese muß, da sie der gegebenen Gleichung, die auf Null gebracht ist, gleich seyn soll, = 0 seyn. Da ferner die Totalreihe für jeden Werth des x zu Null werden soll, so müssen alle Coefficienten derselben = 0 seyn. Beispiel §. 109.

§. 114. Nach §. 67. ist

$$y^n = (Ax^m + Bx^{m+d} + Cx^{m+2d} + Dx^{m+3d} + \ldots)^n$$
$$= \mathfrak{A}x^{mn} + \mathfrak{B}x^{mn+d} + \mathfrak{C}x^{mn+2d} + \mathfrak{D}x^{mn+3d} + \ldots$$

und $\mathfrak{A} = A^n$

$$\mathfrak{B} = \frac{nB\mathfrak{A}}{A}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{(n-1)B\mathfrak{B} + 2nC\mathfrak{A}}{2A}$$

$$\mathfrak{D} = \frac{(n-2)B\mathfrak{C} + (2n-1)C\mathfrak{B} + 3nD\mathfrak{A}}{3A}$$

. . . .

Es folgt hieraus:

Erstens. Erhebt man die Reihe $Ax^m + Bx^{m+d} + Cx^{m+2d} + \ldots$, in welcher die Exponenten von x in der arithmetischen Reihe m, m + d, m + 2d, ... fortschreiten, auf eine beliebige Potenz n, so erhält man eine Reihe, in welcher die Exponenten von x in der arithmetischen Reihe mn, mn + d, mn + 2d, ... fortgehen. Die letztere arithmetische Reihe hat mit der erstern einerlei Namen.

Für $y^n x^p$ bekommt man die Reihe

$$\mathfrak{A}x^{mn+p} + \mathfrak{B}x^{mn+p+d} + \mathfrak{C}x^{mn+p+2d} + \ldots.$$

Hier schreiten die Exponenten von x in einer arithmetischen Reihe fort, deren Unterschied ebenfalls d ist.

Jedes Glied einer ungesonderten Funktion verwandelt sich, wenn man die für y angenommene Reihe setzt, in eine Reihe,

in welcher die Exponenten von x in einer arithmetischen Reihe vom Unterschied d fortschreiten.

Zweitens. Wenn der erste Exponent von x einer Particularreihe einem Exponenten von x einer andern gleich ist, so sind auch die dem gleichen Exponenten nachfolgenden Exponenten in beiden Reihen gleich.

Drittens. Heißt man in den Reihen

$$Ax^m + Bx^{m+d} + Cx^{m+2d} + \ldots$$

$$\text{und } \mathfrak{A}x^{mn} + \mathfrak{B}x^{mn+d} + \mathfrak{C}x^{mn+2d} + \ldots$$

die Coefficienten A und $\mathfrak{A}$ die ersten und alle andern folgende, so kann man sagen, daß der $r$te folgende Coefficient der ersten Reihe, nach Erhebung derselben auf die $n$te Potenz, das erstemal und zwar auf der ersten Potenz in dem $r$ten folgenden Coefficienten der zweiten Reihe vorkommt.

Dasselbe gilt von der Reihe für $y^m x^p$.

Ex. Setzt man in der ungesonderten Funktion

$$y^3 + ax^2y + by^2 + cy + dx + e = 0$$

für y die Reihe $Ax^m + Bx^{m+d} + Cx^{m+2d} + \ldots$, so erhält man für

$$\left.\begin{array}{l} y^3 \\ +\,ax^2y \\ +\,by^2 \\ +\,cy \\ +\,dx \\ +\,e \end{array}\right\} = 0, \left\{\begin{array}{ll} A^3x^{3m} + 3A^2Bx^{3m+d} + (3A^2C + 3AB^2)x^{3m+2d} + \ldots & \text{I.} \\ aAx^{m+2} + aBx^{m+2+d} + aCx^{m+2+2d} + \ldots & \text{II.} \\ bA^2x^{2m} + 2bABx^{2m+d} + (2bAC + bB^2)^{2m+2d} + \ldots & \text{III.} \\ cAx^m + cBx^{m+d} + cCx^{m+2d} + \ldots & \text{IV.} \\ dx^1 + d\,.\,0\,.\,x^{1+d} + d\,.\,0\,.\,x^{1+2d} + \ldots & \text{V.} \\ ex^0 + e\,.\,0x^{0+d} + e\,.\,0\,.\,x^{0+2d} + \ldots & \text{VI.} \end{array}\right.$$

§. 115. Zur Vereinigung aller Particularreihen zu einer Totalreihe ist erforderlich, daß die Exponenten von x jeder Particularreihe unter den Exponenten von x jeder der übrigen Particularreihen Exponenten von x antreffen, die ihnen gleich sind. Denn die Totalreihe, so wie jeder ihrer Coefficienten, muß $= 0$ seyn (§. 113). Nimmt man nun an, die Exponenten von x einer Particularreihe treffen nicht mit den Exponenten von x der übrigen Particularreihen zusammen, so müssen die Coefficienten solcher Particularreihe, so wie die ganze Par-

ticularreihe, für sich = 0 seyn. Das zu solcher Particularreihe gehörige Glied der gegebenen Gleichung müßte also fehlen. Nimmt man ferner an, daß zwar die Exponenten von x einer Particularreihe unter den Exponenten von x einer oder mehrerer andern Particularreihen solche antreffen, die ihnen gleich sind, daß dies aber nicht in Absicht auf alle Particularreihen der Fall sey, so werden einige Particularreihen für sich = 0. Also müßten die zu diesen Particularreihen gehörigen Glieder der gegebenen Gleichung für sich = 0 seyn, da sich dieselben doch nur in Verbindung mit allen übrigen Gliedern der gegebenen Gleichung aufheben sollen.

Ex. Den Forderungen dieses §. wird bei dem Ex. §. 114. Genüge geleistet, wenn man $m = 0$ und $d = 1$ setzt. Durch diese Werthe des m und d erhält man nämlich

$$\left.\begin{array}{rrrl} A^3 + & 3A^2Bx + & \left.\begin{array}{r} 3A^2C \\ + 3AB^2 \end{array}\right| & x^2 + \ldots \quad \text{I.} \\ & & aAx^2 & + \ldots \quad \text{II.} \\ bA^2 + & 2bABx + & \left.\begin{array}{r} 2bAC \\ + bB^2 \end{array}\right| & x^2 + \ldots \quad \text{III.} \\ cA + & cBx + & cCx^2 & + \ldots \quad \text{IV.} \\ & dx + & d.0.x^2 & + \ldots \quad \text{V.} \\ e + & e.0.x. + & e.0.x^2 & + \ldots \quad \text{VI.} \end{array}\right\} = 0.$$

§. 116. Die Particularreihen, deren erste Glieder das erste Glied der Totalreihe bilden, heißen Anfangsreihen. Solche Reihen sind im vorigen Ex. die Reihen I. III. IV. VI.

§. 117. Die ersten Glieder der Particularreihen, die nicht Anfangsreihen sind, der Nichtanfangsreihen, treten in der Totalreihe später ein, als die ersten Glieder der Anfangsreihen. Nichtanfangsreihen sind die Reihen II. V.

§. 118. Alle Exponenten von x der Anfangsreihen sind der Ordnung nach einander gleich.

§. 119. Der erste Exponent von x jeder Nichtanfangsreihe muß irgend einem Exponenten von x der Anfangsreihen gleich seyn, da denn auch die auf diese gleichen Exponenten

folgenden Exponenten von x in beiden Arten von Reihen der Ordnung nach einander gleich sind.

§. 120. Das erste Glied einer Particularreihe kann nicht allein das erste Glied der Totalreihe bilden, da entweder die Gleichnullsetzung des Coefficienten eines solchen Gliedes gar nicht statt finden kann, oder sich Nichts aus dem Coefficienten eines solchen Gliedes, wenn man ihn $= 0$ setzt, bestimmen läßt. In dem Ex. §. 114. z. B. kann der Reihe V. erstes Glied nicht allein das erste Glied der Totalreihe seyn; denn sonst müßte man $d = 0$ setzen, da doch d jede beliebige bestimmte Größe bedeuten soll. Der Reihe I. in dem angeführten Ex. erstes Glied kann nicht allein das erste Glied der Totalreihe seyn, da $A^3 = 0$ den Coefficienten A, d. i. den ersten Coefficienten der für y angenommenen Reihe, unbestimmt läßt.

§. 121. Zur Bildung des ersten Gliedes einer Totalreihe ist, außer dem ersten Gliede einer Particularreihe, wenigstens noch das erste Glied einer andern Particularreihe nothwendig.

§. 122. Setzt man also in eine ungesonderte Funktion zwischen x und y, z. B. in die als Exempel gegebene Funktion (§. 114.) statt y die Reihe $Ax^m + Bx^{m+d} + Cx^{m+2d} + \ldots$, so müssen unter den Exponenten von x der ersten Glieder der entstehenden Particularreihen, also in dem gegebenen Beispiel unter den Exponenten $3m$, $m + 2$, $2m$, m, 1, 0, wenigstens zwei einander gleich seyn.

§. 123. Setzt man zwei solcher Exponenten einander gleich, so läßt sich der Werth von m bestimmen. Aus dem Werthe von m ergeben sich die noch nicht bekannten Exponenten von x der ersten Glieder der Particularreihen. Man setze z. B. in dem gegebenen Exempel $3m = 0$, so ist $m = 0$. Hierdurch erhält man für

$$\left.\begin{array}{l} y^3 \\ +ax^2y \\ +by^2 \\ +cy \\ +dx \\ +e \end{array}\right\} = 0, \left\{\begin{array}{ll} A^3 + 3A^2Bx^d + (3A^2C + 3AB^2)x^{2d} + \dots & I. \\ aAx^2 + aBx^{2+d} + aCx^{2+2d} + \dots & II. \\ bA^2 + 2.b.ABx^d + (2bAC + bB^2)^{2d} + \dots & III. \\ cA + cBx^d + cCx^{2d} + \dots & IV. \\ dx^1 + d.0.x^{1+d} + d.0.x^{1+2d} + \dots & V. \\ e + e.0.x^d + e.0.x^d + \dots & VI. \end{array}\right.$$

Man sieht, daß hier die Reihen I. III. IV. VI. Anfangsreihen werden und daß ihre ersten Glieder zusammen das erste Glied der Totalreihe bilden.

Setzt man $3m = m + 2$, so wird $m = 1$ und man findet für

$$\left.\begin{array}{l} y^3 \\ +ax^2y \\ +by^2 \\ +cy \\ +dx \\ +e \end{array}\right\} = 0, \left\{\begin{array}{ll} A^3x^3 + 3A^2Bx^{3+d} + (3A^2C + 3AB^2)^{3+2d} + \dots & I. \\ aAx^3 + aBx^{3+d} + aCx^{3+2d} + \dots & II. \\ bA^2x^2 + 2.bABx^{2+d} + (2bAC + bB^2)^{2+2d} + \dots & III. \\ cAx^1 + cBx^{1+d} + cCx^{1+2d} + \dots & IV. \\ dx^1 + d.0.x^{1+d} + d.0.x^{1+2d} + \dots & V. \\ ex^0 + e.0.x^{0+d} + e.0.x^{0+2d} + \dots & VI. \end{array}\right.$$

Hier werden die Reihen I. und II. zu Anfangsreihen und ihre ersten Glieder geben zusammen das erste Glied der Totalreihe.

§. 124. Alle Glieder, deren Exponenten von x denjenigen Exponenten gleich werden, welche man gleich gesetzt hat, bilden mit den Gliedern, deren Exponenten von x gleich gesetzt worden sind, zusammen das erste Glied der Totalreihe.

§. 125. Daß die Exponenten von x der ersten Glieder der Nichtanfangsreihen unter den Exponenten von x der Anfangsreihen solche antreffen, die ihnen gleich sind (§. 119.), das hangt von der Bestimmung des Unterschieds d ab.

§. 126. Die Vorschrift, nach welcher der Unterschied d bestimmt werden kann, ergibt sich aus den bisherigen Erörterungen. Man gebe dem d einen solchen Werth, daß der Exponent von x des ersten Gliedes in den Anfangsreihen, so wie die Exponenten von x der ersten Glieder der Nichtanfangsreihen Glieder in einer und derselben arithmetischen Reihe werden.

Ex. 1. Wenn man in dem Ex. (§. 114.) $3m = 0$, also auch $m = 0$ setzt, so wird der Exponent von x des ersten Gliedes der Anfangsreihen 0; die Exponenten von x der ersten Glieder der Nichtanfangsreihen werden 1, 2. (§. 123.) Hier ist der Unterschied der arithmetischen Reihe, in welcher 0, 1, 2 als Glieder liegen, 1; also $d = 1$. Für $m = 0$ und $d = 1$ findet man das Ex. §. 115. Die Gestalt der für y anzunehmenden Reihe ist $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$

Ex. 2. Setzt man in dem Ex. (§. 114.) $3m = m + 2$, also $m = 1$, so erhält man

Exponent von x des ersten Gliedes der Anfangsreihen: 3	Exponenten von x der ersten Glieder der Nichtanfangsreihen: 2, 1, 0.

Der Unterschied der arithmetischen Reihe, in welcher 3, 2, 1, 0 als Glieder in der Ordnung, wie diese Zahlen hier auf einander folgen, liegen, ist -1; also ist hier $d = -1$. Folglich ist hier $y = Ax + B + Cx^{-1} + Dx^{-2} + \ldots$ Die Totalreihe, die sich für diese Gestalt der für y zu setzenden Reihe ergibt, wird gefunden, wenn man im Ex. 2. (§. 123.) $d = -1$ setzt. Sie ist

$$\begin{array}{llll}
A^3x^3 & + 3A^2Bx^2 & + (3A^2C + 3AB^2)x & + \ldots \\
aA & + aB & + aC & + \ldots \\
 & bA^2 & + 2 . b . AB & + \ldots \\
 & & cA & + \ldots \\
 & & d & \\
 & & & + e
\end{array}$$

§. 127. Die Reihe, die man für y findet, kann steigend oder fallend seyn. Sie ist steigend, wenn jeder von den Exponenten von x der ersten Glieder der Nichtanfangsreihen größer, und fallend, wenn jeder von diesen Exponenten von x kleiner ist, als der Exponent von x des ersten Gliedes der Anfangsreihen.

§. 128. Es ist für sich klar, daß von den erwähnten Exponenten nicht einige größer und andere kleiner seyn dürfen,

als der Exponent von x des ersten Gliedes der Totalreihe. Sollten also bei Setzung des für m gefundenen Werthes einige von denselben größer und andere kleiner werden, so können die Glieder, deren Exponent von x man gleich gesetzt hat, nicht zusammen Theile des ersten Gliedes der Totalreihe werden.

Setzt man z. B. in (§. 114.) $m + 2 = 2m$, so wird $m = 2$, und man erhält

Exponent von x des ersten Gliedes der Anfangsreihen: 4	Exponenten von x der ersten Glieder der Nichtanfangsreihen: 6, 2, 1, 0.

Man darf also die Exponenten $m + 2$ und $2m$ nicht einander gleich setzen.

§. 129. Wenn sich die Reihe für y, die man sucht, so schnell, als möglich, nähern soll, so muß der Unterschied d so groß, als möglich, angenommen werden. Denn man nehme aus der Reihe $Ax^m + Bx^{m+d} + Cx^{m+2d} + \ldots = y$ zwei auf einander folgende Glieder Rx^{m+rd} und $Sx^{m+(r+1)d}$, so ist, mit Vernachlässigung der Coefficienten R und S, auf welche hier nichts ankommt, $\frac{x^{m+rd}}{x^{m+(r+1)d}} = x^{-d}$. Ist nun die Reihe für y steigend, also d bejaht, und x ein echter Bruch (§. 35.), so ist x^{-d} oder $\frac{1}{x^d}$ eine Eins übersteigende Zahl, die desto grösser ist, je größer man d annimmt, d. h. in diesem Falle ist $x^{m+(r+1)d}$ desto unbeträchtlicher gegen x^{m+rd}, je größer d ist. Ist aber die Reihe für y fallend, also d verneint und x eine Eins übersteigende Zahl, so wird x^{-d} zu x^{+d}, und dieses x^{+d} ist desto größer, je größer d ist, d. i. in diesem Falle ist ebenfalls $x^{m+(r+1)d}$ desto unbeträchtlicher gegen x^{m+rd}, je größer d ist.

§. 130. Ist m und d und somit die Gestalt der für y anzunehmenden Reihe gehörig bestimmt, so lassen sich die Coefficienten A, B, C, ... derselben auf eine dem Verfahren (§. 109.) ähnliche Weise finden. Die Möglichkeit hiervon leuchtet aus folgenden Gründen ein. Im ersten Coefficienten der

Totalreihe kommt bloß A als unbekannte Größe vor. Da der erste, wie jeder Coefficient der Totalreihe, $= 0$ ist, so hat man eine Gleichung, aus welcher sich A bestimmen läßt. Nun kommt in allen Anfangsreihen der rte folgende Coefficient R zum erstenmal und zwar auf der ersten Potenz im rten folgenden Gliede vor (§. 114.). Eben so erscheint in einer Nichtanfangsreihe der rte folgende Coefficient R das erstemal und zwar auf der ersten Potenz in dem rten folgenden Gliede. Eine Nichtanfangsreihe tritt aber später in der Totalreihe ein, als die Anfangsreihen. Also kann im zweiten Coefficienten der Totalreihe bloß B und dies B bloß auf der ersten Potenz als unbekannte Größe vorkommen; im dritten kann bloß C als unbekannte Größe vorkommen und dieses C bloß auf der ersten Potenz, u. s. w. Das A nämlich, das im zweiten Coefficienten ebenfalls vorkommen kann, ist aus dem ersten schon bestimmt. Das A und B, das sich im dritten befinden kann, ist schon bestimmt aus dem ersten und zweiten, u. s. w. Hierher gehörige Beispiele sind das Ex. §. 115. und das Ex. 2. §. 126.

Exempel. Man soll das y der Funktion

$$y^3 + a^2y + axy - x^3 - 2a^3 = 0$$

durch eine Reihe ausdrücken, die nach den Potenzen von x fortschreitet.

Es sey $y = Ax^m + Bx^{m+d} + Cx^{m+2d} + \ldots$

Also ist

$$y^3 = A^3x^{3m} + 3A^2Bx^{3m+d} + (3A^2C + 3AB^2)x^{3m+2d} + \ldots$$
$$a^2y = a^2Ax^m + a^2Bx^{m+d} + a^2Cx^{m+2d} + \ldots$$
$$axy = aAx^{m+1} + aBx^{m+1+d} + aCx^{m+1+2d} + \ldots$$
$$-x^3 = -x^3 + 0 \,.\, x^{3+d} + 0 \,.\, x^{3+2d} + \ldots$$
$$-2a^3 = -2a^3 \,.\, x^0 + 2 \,.\, a^3 \,.\, 0 \,.\, x^{0+d} + 2a^3 \,.\, 0 \,.\, x^{0+2d} + \ldots$$

Um nun erstens eine steigende Reihe zu erhalten, setze man $3m = m$, also $m = 0$. Man bekommt hierdurch

Exponent von x des ersten Gliedes der Anfangsreihen: 0	Exponenten von x der ersten Glieder der Nichtanfangsreihen: 1, 3.

Hieraus ergibt sich $d = 1$. (§. 126.)

Also ist die Gestalt der Reihe, durch welche y ausgedrückt werden soll, $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$

Die Totalreihe ist

$$\left.\begin{array}{l|l|l|l} A^3 + 3A^2B & x + 3AB^2 & x^2 + B^3 & x^3 + \ldots \\ & + 3A^2C & + 6ABC & \\ & & + 3A^2D & \\ a^2A + a^2B & + a^2C & + a^2D & \\ \quad + aA & + aB & + aC & \\ -2a^3 & & -1 & \end{array}\right\} = 0$$

Da nun jeder Coefficient der Totalreihe $= 0$ ist, so hat man die Gleichungen:

1) $A^3 + a^2A - 2a^3 = 0$, wo, wie der Versuch zeigt, $A = a$ ist.

2) $3A^2B + a^2B + aA = 0$, oder, wenn man den Werth für A gebraucht, $4a^2B + a^2 = 0$, woraus sich $B = -\frac{1}{4}$ ergibt.

3) $3AB^2 + 3A^2C + a^2C + aB = 0$, oder

$$\frac{3}{16}a + 4a^2 . C - \frac{1}{4}a = 0.$$

Hieraus findet man $C = -\frac{1}{64}a$

Auf dieselbe Art findet man $D = \frac{131}{512 . a^2}$ u. s. w.

Es ist also $y = a - \frac{1}{4}x - \frac{1}{64}ax^2 + \frac{131}{512 . a^2}x^3 + \ldots$

Da die Gleichung $A^3 + a^2A - 2a^3 = 0$ vom dritten Grade ist, so hat sie, außer a, noch zwei Wurzeln. Diese sind aber unmöglich und werden daher nicht gebraucht.

Soll zweitens eine fallende Reihe gefunden werden, so setze man $3m = 3$, also $m = 1$. Man erhält hierdurch

Exponent von x des ersten Gliedes der Anfangsreihen:	Exponenten von x der ersten Glieder der Nichtanfangsreihen: 2, 1, 0.
3	

Also ist $d = -1$, und

$$y = Ax + B + Cx^{-1} + Dx^{-2} + \ldots$$

Ferner

$$\left.\begin{array}{r|c|r|l|l|l}
y^3 & & A^3 & x^3 + 3A^2B & x^2 + 3AB^2 & x + B^3 \quad x^0 + .. \\
 & & & & + 3A^2C & + 6ABC \\
 & & & & & + 3B^2D \\
a^2y & = & & & + a^2A & + a^2A \\
axy & & & aA & + aB & + aC \\
-2a^3 & & & & & -2a^3 \\
-x^3 & & -1 & & &
\end{array}\right\} = 0.$$

Man findet hieraus

$$A = 1,\ B = -\frac{1}{3}a,\ C = -\frac{1}{3}a^2,\ D = \frac{55}{81}a^3,\ \text{u. s. w.}$$

Also ist auch

$$y = x - \frac{1}{3}a - \frac{1}{3}a^2x^{-1} + \frac{55}{81}a^3x^{-2} - \ldots$$

§. 131. Um die Gestalt der für y anzunehmenden Reihe zu finden, braucht man nur das erste Glied der Reihe $Ax^m + Bx^{m+d} + Cx^{m+2d} + \ldots$ statt y in die gegebene ungesonderte Funktion zu setzen. Hierdurch erhält man die ersten Glieder aller Particularreihen und die Exponenten von x solcher Glieder. Im Exempel (§. 130.) sind diese Exponenten $3m$, m, $m + 1$, 3, 0. Zwei dieser Exponenten gleich gesetzt, geben den Werth des m. Aus ihm erhält man denn weiter den Exponenten von x des ersten Gliedes der Anfangsreihen, so wie die Exponenten von x der ersten Glieder der Nichtanfangsreihen. Aus diesen Exponenten von x findet man endlich den Werth von d.

§. 132. Bisweilen kann, was sich aber freilich erst im Laufe der Rechnung entdeckt, der größte Werth, den die Regel (§. 126.) für d anzunehmen verstattet, nicht statt finden. Alsdann muß man einen kleinern, der angeführten Regel gemäß, annehmen.

Ex. Man soll das y der Gleichung

$$y^4x - y^2x^3 + x^3y - y^2 + ax^2y + 4xy - 4x^2 = 0$$

durch eine Reihe, die nach den Potenzen von x fortschreitet, ausdrücken.

Die Exponenten, die hier zur Bestimmung des m in Betrachtung zu ziehen sind, sind $4m + 1$, $2m + 3$, $m + 3$, $2m$, $m + 2$, $m + 1$, 2.

Setzt man nun $2m = 2$, also $m = 1$, so werden diese Exponenten zu

$$5,\ 5,\ 4,\ 2,\ 3,\ 2,\ 2.$$

Sie müssen in der Ordnung 2, 3, 4, 5 Glieder einer arithmetischen Reihe seyn. Nach §. 126. ist also verstattet, $d = 1$ zu setzen.

Also kann man setzen

$$y = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots.$$

Setzt man diese Reihe für y in die gegebene Gleichung, so erhält man die Totalreihe

$$\left.\begin{array}{r} 4A \\ -A^2 \\ -4 \\ \\ \\ \end{array}\right| x^2 \left.\begin{array}{r} +4B \\ -2AB \\ +aA \\ \\ \\ \end{array}\right| x^3 \left.\begin{array}{l} +4C \\ -(2AC+B^2) \\ +aB \\ +A \\ \\ \end{array}\right| x^4 \left.\begin{array}{l} +4D \\ -2(AD+BC) \\ +aC \\ +B \\ -A^2 \end{array}\right| x^5 \ldots, \quad = 0.$$

Man hat also

1) $4A - A^2 - 4 = 0$, woraus man $A = 2$ erhält.

2) $4B - 2AB + aA = 0$, oder $4B - 4B + 2a = 0$, oder $2a = 0$.

Die Größe $2a$ ist aber nicht Null.

Die für y gesetzte Reihe kann also nicht Statt finden. Man setze $d = \frac{1}{2}$, also

$$y = Ax + Bx^{\frac{3}{2}} + Cx^{\frac{4}{2}} + Dx^{\frac{5}{2}} + \ldots.$$

Hierdurch erhält man als Totalreihe

$$\left.\begin{array}{r} 4A \\ -A^2 \\ -4 \end{array}\right| x^2 \left.\begin{array}{r} +4B \\ -2AB \\ \\ \end{array}\right| x^{\frac{5}{2}} \left.\begin{array}{l} +4C \\ -(2AC+B^2) \\ +aA \end{array}\right| x^3 \left.\begin{array}{l} +4D \\ -2(AD+BC) \\ +aB \end{array}\right| x^{\frac{7}{2}} + \ldots = 0.$$

1) Aus $4A - A^2 - 4 = 0$ erhält man $A = 2$. Substituirt man diesen Werth für A in

2) $4B - 2AB = 0$, so bekommt man $4B - 4B = 0$, oder $(4-4)B = 0$. Hieraus läßt sich der Werth des B nicht bestimmen. Man setze den Werth für A in die Gleichung

3) $4C - 2AC - B^2 + aA = 0$. Hierdurch erhält man $4C - 4C - B^2 + 2a = 0$. Also ist $B = \pm\sqrt{2a}$. Setzt man für A seinen Werth 2, und für B den Werth $+\sqrt{2a}$ in die Gleichung

4) $4D - 2AD - 2BC + aB = 0$, so bekommt man $4D - 4D - 2\sqrt{2a}\,.\,C + a\,.\,\sqrt{2a} = 0$, und $C = \frac{1}{2}a$. Setzt man den Werth $-\sqrt{2a}$ für B, so erhält man aus $4D - 2AD - 2BC + aB = 0$ die Gleichung $4D - 4D + 2\sqrt{2a}\,.\,C - a\,.\,\sqrt{2a} = 0$. Aus ihr ergibt sich $C = \frac{1}{2}a$ u. s. w.

Man findet also

1) $y = 2x + \sqrt{2ax^3} + \frac{1}{2}ax^2 + \ldots$

2) $y = 2x - \sqrt{2ax^3} + \frac{1}{2}ax^2 + \ldots$

IV. Umkehrung der Reihen.

§. 133. Aufg. Die Größe y sey durch eine nach den Potenzen von x fortschreitende Reihe ausgedrückt; man soll x durch eine Reihe ausdrücken, die nach den Potenzen von y fortgeht, d. h., man soll die gegebene Reihe umkehren.

Aufl. Es sey $y = ax + bx^2 + cx^3 + \ldots$

Aus dieser Gleichung folgt

$$y - ax - bx^2 - cx^3 - \ldots = 0 \;(\odot).$$

Die Aufgabe kann nun gelöst werden nach den (§. 131.) gegebenen Vorschriften. Man muß aber bedenken, daß das, was in (§. 131.) y, hier x, und was dort x, hier y ist.

Man setze, es sey

$$x = Ay^m + By^{m+d} + Cy^{m+2d} + \ldots.$$

Substituirt man die Reihe für x in die Gleichung $\odot$, so

erhält man zu Exponenten der Potenzen von y der ersten Glieder der Particularreihen: 1, m, 2m, 3m, ...

Man setze $m = 1$. Hierdurch bekommt man

Exponent von y des ersten Gliedes der Anfangsreihen:	Exponenten von y der ersten Glieder der Nichtanfangsreihen: 2, 3, 4, ...
1	

Es ist also $d = 1$ und

$$x = Ay + By^2 + Cy^3 + \dots$$

Man erhält also

$$\left.\begin{array}{l|} y \\ -ax \\ -bx^2 \\ -cx^3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} = \begin{array}{|c|} 1 \\ -aA \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} y \begin{array}{r|} -aB \\ -bA^2 \end{array} y^2 \begin{array}{r|} -aC \\ -2bAB \\ -cA^3 \end{array} y^3 - \dots \right\} = 0.$$

Nun ist

1) $1 - aA = 0$, also $A = \frac{1}{a}$

2) $-aB - b \cdot \frac{1}{a^2} = 0$, also $B = -\frac{b}{a^3}$

3) $-aC + 2b \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{b}{a^3} - c \cdot \frac{1}{a^3} = 0$, also $C = \frac{2b^2}{a^5} - \frac{c}{a^4}$

u. s. w.

Also ist

$$x = \frac{1}{a} y - \frac{b}{a^3} \cdot y^2 + \left[\frac{2b^2}{a^5} - \frac{c}{a^4}\right] \cdot y^3 - \dots$$

§. 134. Man darf bei der vorhergehenden Aufgabe nicht etzen $m = 2m$, oder $= 3m$, u. s. w. Denn diese Voraussetzung gibt $m = 0$, $d = 1$, und $x = A + By + Cy^2 + \dots$ Setzt man nun diese Reihe für x in die Gleichung ⊙, so erhält man eine Totalreihe, deren erster Coefficient $= 0$ gesetzt, eine Gleichung von unzählig vielen Abmessungen gibt, aus welcher A nicht bestimmt werden kann. Auch darf man wegen §. 128. nicht setzen $1 = 2m$, oder $= 3m$, u. s. w.

§. 135. Aufg. Wenn $y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots$ ist, die Reihe umzukehren.

Aufl. Es sey $y - a = z = bx + cx^2 + dx^3 + \ldots$ Nun drücke man x zuerst durch z aus und setze dann statt z seinen Werth $y - a$.

V. Von der Reihe, die man erhält, wenn man in einer Funktion von Einer veränderlichen Größe x, $x + k$ statt x setzt.

§. 136. Eine Funktion von x werde überhaupt durch $f(x)$ oder $F(x)$ oder $\phi(x)$ ausgedrückt, wo f, F, ϕ kein Faktor, sondern das Funktionszeichen ist. Was herauskommt, wenn man in die Funktion von x statt x, $x + k$ setzt, werde bezeichnet durch $f(x + k)$ u. s. w.

§. 137. Lehrs. Jede algebraische Funktion von x läßt sich, wenn man in ihr statt x, $x + k$ setzt, durch eine Reihe von der Form $f(x) + pk + qk^2 + rk^3 + \ldots$, wo $f(x)$ die gegebene oder ursprüngliche Funktion ist und p, q, r, ... von k unabhängige, d. i. durch k nicht bestimmte Funktionen von x sind, ausdrücken.

Bew. I. Es sey $f(x) = Ax^a + Bx^b + Cx^c + \ldots$, wo a, b, c, ... beliebige bestimmte Größen bedeuten.

Setzt man $x + k$ statt x, so erhält man

$$f(x + k) = A(x + k)^a + B(x + k)^b + C(x + k)^c + \ldots$$

Jedes Glied des letztern Ausdrucks läßt sich nach dem binomischen Lehrsatze in eine Reihe verwandeln. Man erhält hierdurch

$$\begin{array}{l|l|l} A(x+k)^a = Ax^a + aAx^{a-1} & k + \frac{a(a-1)}{1.2}Ax^{a-2} & k^2 + \ldots \\ B(x+k)^b = Bx^b + bBx^{b-1} & + \frac{b(b-1)}{1.2}Bx^{b-2} & \\ C(x+k)^c = Cx^c + cCx^{c-1} & + \frac{c(c-1)}{1.2}Cx^{c-2} & \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot & \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot & \end{array}$$

Die erste verticale Columne auf der rechten Seite dieser Gleichung ist $f(x)$ oder die gegebene Funktion. Die Potenzen von k folgen auf einander gemäß der im Lehrsatze aufgestellten Form, und ihre Coefficienten sind von k unabhängige Funktionen von x. Also gilt der behauptete Satz für $f(x) = Ax^a + Bx^b + Cx^c + \ldots$

II. Es sey $f(x) = (Ax^a + Bx^b + Cx^c + \ldots)^n$.

Man setze $x + k$ statt x; dann kann man annehmen, es sey

$$A(x+k)^a + B(x+k)^b + C(x+k)^c + \ldots$$
$$= u + pk + qk^2 + rk^3 + \ldots,$$

wo $u = Ax^a + Bx^b + Cx^c + \ldots$ ist.

Also ist auch

$$[A(x+k)^a + B(x+k)^b + C(x+k)^c + \ldots]^n =$$
$$[u + pk + qk^2 + rk^3 + \ldots]^n.$$

Der Ausdruck $[u + pk + qk^2 + rk^3 + \ldots]^n$ gibt aber, nach dem polynomischen Lehrsatze entwickelt, eine Reihe von der Form

$$u^n + Pk + Qk^2 + Rk^3 + \ldots,$$

wo $P, Q, R, \ldots$ Funktionen bloß von x sind.

Also ist, wenn man in $f(x) =$
$[Ax^a + Bx^b + Cx^c + \ldots]^n$ statt x, $x + k$ setzt,

$$f(x+k) = f(x) + Pk + Qk^2 + Rk^3 + \ldots$$

III. Es sey

$$f(x) = \frac{[\mathfrak{A}x^\alpha + \mathfrak{B}x^\beta + \mathfrak{C}x^\gamma + \ldots]^m}{[Ax^a + Bx^b + Cx^c + \ldots]^n}$$
$$= [\mathfrak{A}x^\alpha + \mathfrak{B}x^\beta + \mathfrak{C}x^\gamma + \ldots]^m \cdot [Ax^a + Bx^b + Cx^c + \ldots]^{-n}$$

Bringt man nun $x + k$ statt x in die Funktion, so kann man nach dem eben Bewiesenen setzen

$$[\mathfrak{A}(x+k)^\alpha + \mathfrak{B}(x+k)^\beta + \mathfrak{C}(x+k)^\gamma + \ldots]^m = u^m + P'k + Q'k^2 + \ldots$$

und

$$[A(x+k)^a + B(x+k)^b + C(x+k)^c + \ldots]^{-n} = v^{-n} + P''k + Q''k^2 + \ldots,$$

wo $u^m = [\mathfrak{A}x^\alpha + \mathfrak{B}x^\beta + \mathfrak{C}x^\gamma + \ldots]^m$,

$v^{-n} = [Ax^a + Bx^b + Cx^c + \ldots]^{-n}$,

und P', Q', ... P'', Q'', ... Funktionen bloß von x sind.

Also ist

$$f(x+k) = u^m v^{-n} + \left.\begin{matrix} P'v^{-n} \\ + P''u^m \end{matrix}\right| k + \left.\begin{matrix} Q'v^{-n} \\ + P'P'' \\ + Q''u^m \end{matrix}\right| k^2 + \ldots$$

Nun ist

$$u^m v^{-n} = \frac{(\mathfrak{A}x^\alpha + \mathfrak{B}x^\beta + \mathfrak{C}x^\gamma + \ldots)^m}{(Ax^a + Bx^b + Cx^c + \ldots)^n} = f(x)$$

Also kann man setzen

$$f(x+k) = f(x) + Pk + Qk^2 + \ldots$$

IV. Es sey $f(x)$ eine Größe, die eine polynomische Funktion unter dem Wurzelzeichen enthält, z. B.

$$f(x) = Ax + \sqrt[n]{(a + bx + cx^2)}$$
$$= Ax + (a + bx + cx^2)^{\frac{1}{n}},$$

so läßt sich, wenn man $x + k$ statt x setzt, $a + b(x+k) + c(x+k)^2$ darstellen durch $w + pk + qk^2$, also $[a + b(x+k) + c(x+k)^2]^{\frac{1}{n}}$ durch

$$[w + pk + qk^2]^{\frac{1}{n}},$$

wo $w = a + bx + cx^2$ ist.

Die Größe $[w + pk + qk^2]^{\frac{1}{n}}$ gibt aber, nach dem polynomischen Lehrsatze entwickelt, eine Reihe von der Form

$$w^{\frac{1}{n}} + p'k + q'k^2 + \ldots$$

Man bekommt also aus der Funktion

$$f(x) = Ax + \sqrt[n]{(a + bx + cx^2)},$$

wenn man $x + k$ statt x setzt,

$$f(x + k) = \left\{ \begin{array}{l} Ax + Ak \\ w^{\frac{1}{n}} + p'k + q'k^2 + \ldots \end{array} \right.$$
$$= f(x) + Pk + Qk^2 + \ldots$$

§. 138. Bedeutet e die Basis des natürlichen Logarithmensystems, so ist

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \ldots$$

Die Reihe auf der linken Seite dieser Gleichung besteht aus lauter algebraischen Größen. Sie läßt sich also, wenn sich x in $x + k$ verwandelt, durch eine Reihe von der Form

$$f(x) + pk + qk^2 + rk^3 + \ldots,$$

wo $f(x)$ die Größe e^x oder die ihr gleiche Reihe und p, q, r, ... Funktionen von x bedeuten, ausdrücken, d. h.: verwandelt sich in der exponentialen Größe e^x, deren Gleichungsreihe eine Zahl durch ihren Logarithmen gibt, x in $x + k$, so läßt sich die Größe e^{x+k} allemal durch eine Reihe von der angeführten Form darstellen.

Dasselbe gilt auch für die Reihen

$$a^x = 1 + \frac{\lg \text{nat } a}{1} x + \frac{(\lg \text{nat } a)^2}{1.2} x^2 + \frac{(\lg \text{nat } a)^3}{1.2.3} x^3 + \ldots$$

und $y = 1 + \frac{\lg \text{nat } y}{1} + \frac{(\lg \text{nat } y)^2}{1.2} + \frac{(\lg \text{nat } y)^3}{1.2.3} + \ldots$

Setzt man nämlich in letzterer $y = e^x$, so wird $\lg \text{nat } y = x$, und man erhält die Reihe

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

Es gilt endlich auch für die Reihe

$$a^x = 1 + \frac{x}{\lg e} + \frac{x^2}{2.(\lg e)^2} + \frac{x^3}{2.3.(\lg e)^3} + \ldots$$

§. 139. Nach §. 81. ist, wenn M den Modulus eines logarithmischen Systems bedeutet,

$$\lg x = 2M.\frac{x-1}{x+1} + \frac{2M}{3}.\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{2M}{5}.\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \ldots$$

Für die logarithmische Größe $\lg x$ gilt also auch, wenn sich x in $x + k$ verändert, der Satz (§. 137.).

§. 140. Da $\text{Sin}\, x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots$

$$\text{und } \text{Cos}\, x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots.$$

ist, so gilt der Satz (§. 137.) auch für $\text{Sin}\, x$ und $\text{Cos}\, x$.

Man sieht wohl, daß er auch

$$\text{für } \text{Tg}\, x = \frac{\text{Sin}\, x}{\text{Cos}\, x} = \frac{x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots}{1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots.}$$

gilt, da sich $\text{Tg}\, x$ durch eine Reihe ausdrücken läßt, deren Glieder algebraische Größen sind.

Er gilt überhaupt für jede durch ihren Bogen ausgedrückte trigonometrische Größe.

§. 141. Nach §. 104. hat man für $\text{Sin}\, x = y$

$$x = y + \frac{y^3}{2.3} + \frac{3.y^5}{2.4.5} + \frac{3.5.y^7}{2.4.6.7} + \frac{3.5.7.y^9}{2.4.6.8.9} + \ldots$$

Nach §. 105. ist

$$\text{arc. Cos}\, z = \tfrac{1}{2}n - z - \frac{z^3}{2.3} - \frac{3.z^5}{2.4.5} - \frac{3.5.z^7}{2.4.6.7} - \ldots$$

und in §. 100., wenn man $\text{Tg}\, x = t$ setzt,

$$\text{arc. Tg}\, t = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \ldots$$

Der Satz (§. 137.) gilt auch für $\text{arc. Sin}\, y$, $\text{arc. Cos}\, z$, $\text{arc. Tg}\, t$, so wie für jede Funktion, die einen Kreisbogen durch eine trigonometrische Linie gibt.

Zweiter Abschnitt.

Die Differentialrechnung.

Erstes Kapitel.

Grundlehren der Differentialrechnung überhaupt und Differentiation der algebraischen Funktionen von einer veränderlichen Größe insbesondere.

§. 142. Lehrs. Es ist aus dem Vorhergehenden bekannt, daß, wenn sich in der Funktion $f(x)$ das x in $x+k$ verwandelt, man setzen kann $f(x+k) = f(x) + Bk + Ck^2 + Dk^3 + Ek^4 + \ldots$ ($\odot$) Die Coefficienten B, C, D, E, ... bedeuten von k unabhängige Funktionen von x. Es läßt sich zeigen, daß, wenn man B aus $f(x)$ zu bestimmen weiß, man durch ein ähnliches Verfahren C aus B, D aus C, E aus D u. s. w. herleiten kann.

Bew. In der Funktion $\odot$ verwandle sich x in $x+l$, wo l von x und k ganz unabhängig ist, und jeden beliebigen Werth erhalten kann. Dadurch wird

$$\begin{array}{r|c|l}
f(x+k) & \text{zu} & f(x+k+l) \\
f(x) & & f(x) + Bl + Cl^2 + Dl^3 + El^4 + \ldots \\
B & & \quad B + B'l + B''l^2 + B'''l^3 + B^{iv}l^4 + \ldots \\
C & & \quad C + C'l + C''l^2 + C'''l^3 + C^{iv}l^4 + \ldots \\
D & & \quad D + D'l + D''l^2 + D'''l^3 + D^{iv}l^4 + \ldots \\
. & & \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .
\end{array}$$

Die Buchstaben B', B'', B''', ..., C', C'', C''', ..., D', D'', D''', ... bedeuten Funktionen von x, die nichts von l enthalten.

Die hier gefundenen Werthe bringe man in die Gleichung $\odot$. Man erhält hierdurch, wenn man nach l ordnet,

$$
f(x+k+l) = \begin{array}{l|l|l|l}
f(x) + B & l + C & l^2 + D & l^3 + \ldots \\
+ Bk \; + B'k & + B''k & + B'''k & \\
+ Ck^2 + C'k^2 & + C''k^2 & + C'''k^2 & \quad (A.) \\
+ Dk^3 + D'k^3 & + D''k^3 & + D'''k^3 & \\
\;\;\cdot \qquad \cdot & \;\;\cdot & \;\;\cdot & \\
\;\;\cdot \qquad \cdot & \;\;\cdot & \;\;\cdot &
\end{array}
$$

Man kann sich aber auch vorstellen, in $f(x)$ verwandle sich x in $x+k+l$. Dadurch bekommt man.

$$
f(x+k+l) = f(x) + B(k+l) + C(k+l)^2 + D(k+l)^3 + \ldots
$$

$$
= \left| \begin{array}{l|l|l|l}
f(x) & & & \\
+ Bk \; + B & l & & \\
+ Ck^2 + 2Ck & + C & l^2 & \\
+ Dk^3 \quad + 3Dk^2 & + 3D & + D & l^3 \\
\;\cdot \qquad\quad \cdot & \;\cdot & & . \; (B.)
\end{array} \right.
$$

Die Ausdrücke (A.) und (B.) sind gleich, was für Werthe dem x, k, l auch beigelegt werden mögen. Man lasse aus beiden die erste verticale Columne weg, dividire nach dieser Weglassung durch l und setze nach der Division $l = 0$, so erhält man

$$
B + B'k + C'k^2 + D'k^3 + \ldots = B + 2Ck + 3Dk^2 + \ldots
$$

Also ist

$$
\begin{array}{ll}
B = B & \text{und } B = B \\
B' = 2C & C = \frac{B'}{2} \\
C' = 3D & D = \frac{C'}{3} \\
D' = 4E & E = \frac{D'}{4} \\
\cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot
\end{array}
$$

Nun wird von $f(x)$ das B

von B das B'

von C das C'

von D das D'.

. . . .

dadurch abgeleitet, daß man in den Funktionen von x, f(x), B, C, D, ... statt x, x + 1 setzt und bei den aus dieser Setzung sich ergebenden Entwicklungen jedesmal den Coefficienten nimmt, der zu 1 von der ersten Potenz gehört. Wie also von f(x) das B abgeleitet wird, so wird von B das B′, von C das C′, von D das D′, ... abgeleitet.

Man setze $B = f'(x)$

$$B' = f''(x)$$

Also $C = \frac{f''(x)}{2}$.

Hier wird $f'(x)$ von $f(x)$, $f''(x)$ von $f'(x)$ auf die so eben angegebene Art abgeleitet. Man setze in $f''(x)$ statt x, x + 1, und nehme aus der Entwicklung von $f''(x+1)$ den Coefficienten, der zu 1 von der ersten Potenz gehört. Heißt dieser Coefficient $f'''(x)$, so ist

$$C' = \frac{f'''(x)}{2}$$

und also $D = \frac{f'''(x)}{2.3}$

Das D′ ist der Coefficient, von 1 auf der ersten Potenz, in der Entwicklung von $\frac{f'''(x+1)}{2.3}$.

Setzt man den Coefficienten, von 1 auf der ersten Potenz, in der Entwicklung, die sich aus $f'''(x+1)$ ergibt, $= f^{iv}(x)$, so ist

$$D' = \frac{f^{iv}(x)}{2.3}$$

und also $E = \frac{f^{iv}(x)}{2.3.4}$

u. s. w.

Man hat also übersichtlich

$$f(x) = f(x)$$

$$B = \frac{f'(x)}{1}$$

$$C = \frac{f''(x)}{1.2}$$

$$D = \frac{f'''(x)}{1.2.3}$$

$$E = \frac{f^{IV}(x)}{1.2.3.4}$$

$$. \quad . \quad . \quad ,$$

wo jede von den Funktionen $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{IV}(x)$, ... aus der nächst vorhergehenden gefunden wird, wenn man in dieser statt x, $x + l$ oder, was einerlei ist, statt x, $x + k$ setzt, und aus der Entwicklung, die sich bei dieser Setzung ergibt, den, zu l von der ersten Potenz gehörenden, Coefficienten nimmt.

Man hat also, wenn man in $f(x)$ statt x, $x + k$ setzt,

$$f(x+k) = f(x) + \frac{f'(x)}{1}.k + \frac{f''(x)}{1.2}k^2 + \frac{f'''(x)}{1.2.3}k^3 + \frac{f^{IV}(x)}{1.2.3.4}k^4 + \ldots$$

und sieht, daß man nur in den besonderen Fällen wissen muß, wie $f'(x)$ von $f(x)$ abgeleitet wird, um alle Glieder der Reihe für $f(x + k)$ zu finden.

Beispiel. Es sey $f(x) = x^m$. Setzt man $x + k$ statt x, so erhält man für den Coefficienten, der, bei statt gefundener Entwicklung, zu k von der ersten Potenz gehört, mx^{m-1}. Man hat also

$$f(x) = x^m$$
$$f'(x) = mx^{m-1}$$
$$f''(x) = m(m-1)x^{m-2}$$
$$f'''(x) = m(m-1)(m-2)x^{m-3}$$
$$f^{IV}(x) = m(m-1)(m-2)(m-3)x^{m-4}$$
$$. \quad . \quad . \quad .$$

Also

$$f(x+k) = (x+k)^m = x^m + \frac{m}{1}x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2} + \ldots$$

§. 143. Da

$$f(x+k) = f(x) + f'(x)k + \frac{f''(x)}{1.2}k^2 + \frac{f'''(x)}{1.2.3}k^3 + \ldots,$$

so ist

$$f(x+k) - f(x) = f'(x)k + \frac{f''(x)}{1.2}k^2 + \frac{f'''(x)}{1.2.3}k^3 + \ldots$$

Die Reihe auf der rechten Seite dieser Gleichung ist der Unterschied zwischen dem ursprünglichen Zustand der Funktion $f(x)$ und demjenigen, in welchen sie tritt, wenn man in ihr $x + k$ statt x schreibt. Das erste Glied $f'(x)k$ dieser Reihe, welches k von der ersten Abmessung enthält und nur ein Theil dieses Unterschiedes ist, bezeichne man mit $df(x)$, wo also d kein Faktor ist, und nenne es das Differential der ursprünglichen Funktion $f(x)$. Man hat also

$$df(x) = f'(x)k.$$

Die Größe k ist die Veränderung der Größe x, von welcher die Funktion $f(x)$ abhangt. Nennt man die veränderte Größe x, x', so ist $x' = x + k$, und $x' - x = k$. Hier ist also der Unterschied zwischen der ursprünglichen und der veränderten Größe zugleich das Differential der ursprünglichen. Man muß also, um Gleichförmigkeit in der Bezeichnung zu haben, auch die Veränderung derjenigen Größe, von welcher eine Funktion abhangt, durch diese Größe mit vorgesetztem d, z. B. die Veränderung der Größe x durch dx bezeichnen, wo also wieder d kein Faktor ist. So hat man also

$$df(x) = f'(x)\,dx.$$

§. 144. Das Differential $df(x)$ oder $f'(x)dx$ erhält man, wenn man in $f(x)$ statt x, $x + dx$ setzt, alsdann $f(x + dx)$ bis auf die erste Potenz von dx entwickelt und von dem durch diese Entwicklung Gefundenen $f(x)$ abzieht.

§. 145. Erkl. Eine Funktion differentiiren heißt ihr Differential suchen.

§. 146. Aufg. Man soll ax^n, wo a und n beständige Größen bedeuten, differentiiren.

Setzt man $x + dx$ statt x und entwickelt bis auf die erste Potenz von dx, so erhält man

$$ax^n + anx^{n-1}dx + \ldots$$

Subtrahirt man hiervon ax^n, so bekommt man

$$d(ax^n) = anx^{n-1}dx.$$

§. 147. Für $a = 1$ ist $d(x^n) = nx^{n-1}dx$.

§. 148. Man findet also das Differential der Potenz einer veränderlichen Größe mit beständigem Exponenten, wenn man den Exponenten der Potenz mit der um einen Grad verminderten Potenz und mit dem Differential der veränderlichen Größe multiplicirt. Hat die Potenz, deren Differential man sucht, eine beständige Größe zum Coefficienten, so erhält auch das Differential diese beständige Größe zum Coefficienten.

§. 149. Von der Funktion

$$Ax^a + Bx^b + Cx^c + \ldots$$

erhält man das Differential, wenn man das Differential von jedem einzelnen Gliede nimmt und die Differentiale der einzelnen Glieder addirt. Man hat hiernach

$$d(Ax^a + Bx^b + Cx^c + \ldots) = aAx^{a-1}dx + bBx^{b-1}dx + cCx^{c-1}dx + \ldots$$

§. 150. Wenn sich in

$$f(x) \underline{+} F(x)$$

das x in $x + dx$ verwandelt, so erhält man

$$f(x) \underline{+} f'(x)dx + \ldots$$
$$\underline{+} F(x) \underline{+} F'(x)dx + \ldots$$

Zieht man hiervon $f(x) \underline{+} F(x)$ ab, so bleibt übrig $f'(x) dx \underline{+} F'(x)dx$, welches das Differential von $f(x) \underline{+} F(x)$ ist. Sind Funktionen von x vermittelst des Additions- oder Subtraktionszeichens mit einander verbunden, so erhält man ihr Differential, wenn man das Differential von jeder Funktion nimmt und die erhaltenen Differentiale mit den Vorzeichen der Funktionen, aus welchen sie entsprungen sind, an einander reiht.

§. 151. Setzt man in der Funktion $a + bx$ statt x, $x + dx$, so erhält man

$$a + bx + bdx,$$

und hieraus bekommt man, wenn man $a + bx$ abzieht,

$$d(a + bx) = bdx.$$

Man sieht hieraus, daß in einer Funktion von x diejenigen Glieder, die bloß beständige Größen enthalten, bei der Differentiation wegfallen.

§. 152. Also kann ein und dasselbe Differential aus zwei verschiedenen Funktionen abgeleitet seyn, z. B. das Differential bdx sowohl aus der Funktion $a + bx$, als auch aus der Funktion bx.

§. 153. Man darf also aus der Gleichheit zweier Differentiale nicht auf die Gleichheit der Funktionen schließen, aus denen sie abgeleitet sind.

§. 154. Aber wohl haben zwei gleiche Funktionen von x auch gleiche Differentiale.

Es sey $f(x) = F(x)$ für jeden Werth, den man in beiden Funktionen dem x beilegt. Setzt man nun $x + dx$ statt x, so muß auch für jeden Werth von x und dx seyn

$$f(x) + f'(x)dx + \ldots = F(x) + F'(x)dx + \ldots$$

Folglich ist auch

$$f'(x)dx = F'(x)dx$$

$$\text{oder } df(x) = dF(x).$$

§. 155. Nach frühern Erörterungen hat man

$$f'(x + k) = f'(x) + f''(x)k + \ldots$$
$$f''(x + k) = f''(x) + f'''(x)k + \ldots$$
$$f'''(x + k) = f'''(x) + f^{v}(x)k + \ldots$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Hieraus folgt

$$f'(x + k) - f'(x) = f''(x)k + \ldots$$
$$f''(x + k) - f''(x) = f'''(x)k + \ldots$$
$$f'''(x + k) - f'''(x) = f^{v}(x)k + \ldots$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Die Glieder, die sich hier auf der rechten Seite dieser Gleichungen wirklich ausgedrückt befinden, sind die Differentiale von $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, ... Bezeichnet man diese Diffe-

rentiale auf eine mit der eingeführten Bezeichnungsweise des Differentials übereinstimmende Art, so erhält man

$$df'(x) = f''(x)\,dx$$
$$df''(x) = f'''(x)\,dx$$
$$df'''(x) = f^{iv}(x)\,dx$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Diese Differentiale findet man, wenn man in $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, ... statt x, $x + dx$ setzt und alsdann nach der (§. 144.) gegebenen Vorschrift verfährt.

§. 156. Man hat auch aus dem Vorhergehenden

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$
$$f''(x) = \frac{df'(x)}{dx}$$
$$f'''(x) = \frac{df''(x)}{dx}$$
$$f^{iv}(x) = \frac{df'''(x)}{dx}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Hieraus ist ersichtlich, daß man jede von den Funktionen $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{iv}(x)$, ... aus dem Differential der zunächst vorhergehenden durch ein und dasselbe Verfahren ableiten kann.

§. 157. Bei allen diesen Ableitungen wird die Veränderung des x immer gleich, d. i. dx unveränderlich angenommen.

§. 158. Eine beständige Größe kann kein Differential haben, da sie als immer in ihrem ursprünglichen Zustande verbleibend gedacht wird.

§. 158.* Man nehme das Differential von $\frac{df(x)}{dx} = f'(x)$. Man erhält es dem Vorhergehenden zufolge, wenn man in $f'(x)$ statt x, $x + dx$ setzt und dann nach §. 144. verfährt. Dieses Differential ist $f''(x)\,dx$. Es werde durch $\frac{ddf(x)}{dx}$ oder kürzer durch $\frac{d^2f(x)}{dx}$ bezeichnet. Also ist $\frac{ddf(x)}{dx}$ oder

$\frac{d^2f(x)}{dx} = f''(x)\,dx$. Man hat also auch $\frac{d^2f(x)}{dx^2} = f''(x)$. Also ist ferner $ddf(x) = d^2f(x) = f''(x) \cdot dx^2$. Letzteren Ausdruck bekommt man auch auf folgende Art. Man setze in $f'(x)\,dx$, wo dx beständig ist, $x + dx$ statt x und entwickle bis auf die erste Potenz von dx. Hierdurch erhält man $[f'(x) + f''(x)\,dx + \ldots]\,dx$. Zieht man nun $f'(x)\,dx$ ab, so bleibt $f''(x)\,dx^2$ als das Differential von $f'(x)\,dx$ oder von $df(x)$ übrig. Oder es ist $ddf(x) = f''(x)\,dx^2$, woraus sich denn auch $\frac{ddf(x)}{dx^2} = f''(x)$ ergibt.

Auf dieselbe Weise findet man von $\frac{ddf(x)}{dx^2} = \frac{d^2f(x)}{dx^2} = f''(x)$ das Differential $= \frac{dddf(x)}{dx^2} = \frac{d^3f(x)}{dx^2} = f'''(x)\,dx$, woraus sich denn $\frac{dddf(x)}{dx^3} = \frac{d^3f(x)}{dx^3} = f'''(x)$ und $dddf(x) = d^3f(x) = f'''(x)\,dx^3$ ergibt. Man findet letzteres auch auf eine Art aus $ddf(x) = f''(x)\,dx^2$, die der gleich ist, auf welche man vorhin $f''(x)\,dx^2$ aus $df(x) = f'(x)\,dx$ gefunden hat.

§. 159. Erkl. Es heißt $df(x)$ das erste, $d^2f(x)$ das zweite, $d^3f(x)$ das dritte, ... Differential von $f(x)$, und $\frac{df(x)}{dx}$ der erste, $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ der zweite, $\frac{d^3f(x)}{dx^3}$ der dritte Differentialcoefficient.

§. 160. Wie aus der gegebenen Funktion das erste Differential abgeleitet wird, so wird aus dem ersten das zweite, aus dem zweiten das dritte u. s. w. abgeleitet. Ferner: wie aus der gegebenen Funktion der erste Differentialcoefficient abgeleitet wird, so wird aus dem ersten der zweite, aus dem zweiten der dritte u. s. w. abgeleitet.

Ex. Nach §. 146. ist $d(ax^n) = anx^{n-1}dx$. Da man nun, dx als beständig betrachtet, aus diesem ersten Differential das zweite herleitet, wie man dieses erste Differential aus der gegebenen Funktion hergeleitet hat so ist nach §. 148.

$$d^2(ax^n) = an(n-1) \cdot x^{n-2}dx^2$$

u. s. w.

§. 161. Da, wenn sich in der Funktion f(x) das x in x + k verwandelt,

$$f(x+k) = f(x) + f'(x)k + \frac{f''(x)}{1.2}k^2 + \frac{f'''(x)}{1.2.3}k^3 + \ldots$$

ist, so ist auch nach den bisherigen Erörterungen

$$f(x+k) = f(x) + \frac{df(x)}{dx}k + \frac{d^2f(x)}{1.2.dx^2}k^2 + \frac{d^3f(x)}{1.2.3.dx^3}k^3 + \ldots$$

Diese Formel, nach welcher man die Entwicklung einer Funktion von x in einer Reihe findet, wenn sich in der Funktion x in x + k verwandelt, heißt nach ihrem Erfinder der Taylor'sche Lehrsatz.

§. 162. Setzt man $f(x) = u$, und $f(x+k) = u'$, so ist $u' = u + \frac{du}{dx} \cdot k + \frac{d^2u}{1.2.dx^2} \cdot k^2 + \frac{d^3u}{1.2.3.dx^3}k^3 + \ldots$

Ex. Man soll $f(x) = ax^n$, wenn sich x in x + k verwandelt, nach dem Taylor'schen Lehrsatze in eine Reihe verwandeln.

Es ist

$$d(ax^n) = anx^{n-1}dx$$
$$d^2(ax^n) = an(n-1)x^{n-2}dx^2$$
$$d^3(ax^n) = an(n-1)(n-2)x^{n-3}dx^3$$
$$d^4(ax^n) = an(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}dx^4$$

. . . .

Also

$$\frac{d(ax^n)}{dx} = anx^{n-1}$$
$$\frac{d^2(ax^n)}{dx^2} = an(n-1)x^{n-2}$$
$$\frac{d^3(ax^n)}{dx^3} = an(n-1)(n-2)x^{n-3}$$
$$\frac{d^4(ax^n)}{dx^4} = an(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}$$

. . . .

Setzt man nun die Werthe auf der rechten Seite dieser Gleichungen statt $\frac{df(x)}{dx}$, $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$, $\frac{d^3f(x)}{dx^3}$, . . . in die Taylorsche Formel, so erhält man

$$a(x+k)^n = ax^n + anx^{n-1}k + \frac{an(n-1)x^{n-2}}{1\cdot 2}k^2 + \frac{an(n-1)(n-2)x^{n-3}}{1\cdot 2\cdot 3}k^3 + \ldots,$$

also für $a(x+k)^n$ die Reihe, die man auch durch Anwendun des binomischen Satzes finden würde.

§. 163. Ist in der Funktion ax^n das n eine bejahte ganze Zahl, so erhält man bei fortgesetztem Differentiiren ein letztes Differential

$$d^n(ax^n) = an(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1\cdot dx^n$$

Denn dieses Differential ist, da in ihm keine veränderliche Größe mehr vorkommt, weiter keiner Differentiirung fähige Der Differentialcoefficient

$$\frac{d^n(ax^n)}{dx^n} = an(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1,$$

der sich aus diesem letzten Differential ergibt, ist also eine beständige Größe.

§. 164. Setzt man in der Taylor'schen Formel (§. 161.) $k = dx$, so erhält man

$$f(x+dx) = f(x) + \frac{df(x)}{1} + \frac{d^2f(x)}{1.2} + \frac{d^3f(x)}{1.2.3} + \ldots$$

§. 165. Da

$$f(x+k) - f(x) = \frac{f'(x)k}{1} + \frac{f''(x)}{1.2}.k^2 + \frac{f'''(x)}{1.2.3}k^3 + \ldots$$

ist, so ist

$$\frac{f(x+k) - f(x)}{k} = \frac{f'(x)}{1} + \frac{f''(x)}{1.2}.k + \frac{f'''(x)}{1.2.3}.k^3 + \ldots$$

Es ist in die Augen fallend, daß, je mehr das k abnimmt, desto mehr die Größe $\frac{f(x+k)-f(x)}{k}$ sich der Größe $\frac{f'(x)}{1}$ nähert, und daß jene Größe dieser, durch fortwährende Abnahme des k, so nahe gebracht werden kann, als man will. Alsoist $\frac{f'(x)}{1}$ die Grenze des Verhältnisses $\frac{f(x+k)-f(x)}{k}$.

Die Größe $f(x+k) - f(x)$ ist die Veränderung, welche $f(x)$ erleidet, wenn sich in $f(x)$ das x in $x+k$ verwandelt. Also ist $\frac{f(x+k)-f(x)}{k}$ das Verhältniß der Veränderung

der veränderlichen Größe einer Funktion und der Veränderung der Funktion selbst.

Man kann also den Differentialcoefficienten $\frac{df(x)}{dx} = f'(x)$ auch als die Grenze des Verhältnisses der Veränderung der veränderlichen Größe einer Funktion und der Veränderung der Funktion selbst ansehen.

Nimmt man an, in $f'(x)$ verändere sich x in $x + k$, so erhält man

$$\frac{f'(x+k) - f'(x)}{k} = f''(x) + pk + qk^2 + \ldots,$$

wo $p, q, \ldots$ Funktionen von x sind, und man folgert hieraus, daß $f''(x)$ oder der zweite Differentialcoefficient $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ als die Grenze des Verhältnisses $\frac{f'(x+k) - f'(x)}{k}$ angesehen werden kann.

§. 166. Es sey sowohl u als v, also auch uv eine Funktion von x. Verwandelt sich x in $x + dx$, so erhält man,

1) wenn $uv = f(x)$ gesetzt wird,

$$f(x) + f'(x)\,dx + \ldots \text{ (A.)}$$

2) wenn man $u = F(x)$, und $v = \phi(x)$ setzt,

$$F(x) + F'(x)\,dx + \ldots$$

$$\phi(x) + \phi'(x)\,dx + \ldots$$

Durch Multiplication der beiden letzten Reihen in einander bekommt man

$$F(x).\phi(x) + \left.\begin{array}{l}\phi(x).F'(x)\\ + F(x).\phi'(x)\end{array}\right| dx + \ldots \text{ (B.)}$$

Die Glieder der Reihen (A.) und (B.), die, bei weiterer Fortsetzung der Reihen, dx auf der zweiten, dritten, ... Potenz enthalten würden, sind weggelassen, weil man sie nicht braucht.

Die Reihen (A.) und (B.) sind identisch, auch ist $f(x) = F(x).\phi(x)$. Man hat also

$$f'(x)\,dx = \phi(x).F'(x)\,dx + F(x).\phi'(x)\,dx$$

Die Größe $f'(x)\,dx$ ist das Differential von $f(x) = uv$.

Also ist auch

$$d(uv) = \phi(x) . F'(x) dx + F(x) . \phi'(x) dx$$

Es ist ferner

$$\phi(x) = v$$
$$F(x) = u$$
$$F'(x) dx = dF(x) = du$$
$$\phi'(x) dx = d\phi(x) = dv.$$

Folglich

$$d(uv) = vdu + udv.$$

Man findet also das Differential eines Produkts aus zwei Faktoren, deren jeder eine Funktion von x ist, wenn man jeden Faktor mit dem Differential des andern Faktors multiplicirt und die so erhaltenen Produkte addirt.

§. 167. Soll man das Differential des Produkts tuv, das aus drei Faktoren besteht, deren jeder eine Funktion von x ist, finden, so setze man

$$tu = w, \text{ also } tuv = wv,$$

da denn $d(wv) = vdw + wdv$;

folglich
$$d(tuv) = v . d(tu) + tu . dv$$
$$= v . [udt + tdu] + tu . dv$$
$$= vudt + vtdu + tu . dv.$$

§. 168. Auf ähnliche Art findet man das Differential eines aus vier und mehrern veränderlichen Faktoren entspringenden Produkts.

§. 169. Man findet überhaupt das Differential eines Produkts, das aus Faktoren besteht, deren jeder eine Funktion von x ist, wenn man das Differential eines jeden Faktors mit den andern Faktoren multiplicirt und die Produkte, welche man so erhält, addirt.

§. 170. Aus

$$d(tuv) = vudt + vtdu + tudv$$

erhält man, wenn $t = u = v$ gesetzt wird,

$$d(t^3) = t^2dt + t^2dt + t^2dt$$
$$= 3t^2dt.$$

§. 171. Es sey $f(x) = F(x) . \phi(x)$.

Verwandelt sich hier x in $x + k$, so verwandelt sich

$F(x)$ in $F(x) + F'(x)k + pk^2 + \ldots$

und $\phi(x)$ in $\phi(x) + \phi'(x)k + qk^2 + \ldots$

Hieraus erhält man

$$f(x+k) = F(x).\phi(x) + \left.\begin{array}{l}\phi(x).F'(x)\\ + F(x).\phi'(x)\end{array}\right| k + \left.\begin{array}{l}\phi(x).p\\ +\phi'(x).F'(x)\\ +F(x).q\end{array}\right| k^2 + \ldots$$

Also ist

$$\frac{f(x+k) - f(x)}{k} = \left.\begin{array}{l}\phi(x).F'(x) + \phi(x)p\\ + F(x).\phi'(x) + \phi'(x).F'(x)\\ \qquad + F(x).q\end{array}\right| k + \ldots$$

Folglich ist der Differentialcoefficient $\frac{df(x)}{dx} = \phi(x).F'(x) + F(x).\phi'(x)$ übereinstimmend mit §. 165. als die Grenze des Verhältnisses $\frac{f(x+k) - f(x)}{k}$ anzusehen.

§. 172. Sowohl der Zähler, als der Nenner des Bruchs $\frac{u}{v}$, also auch der Bruch sey eine Funktion von x. Wenn man $x + dx$ statt x setzt, so verwandelt sich

u in $u + p.dx + \ldots$

v in $v + q.dx + \ldots$

Also $\frac{u}{v}$ in $\frac{u + p.dx + \ldots}{v + q.dx + \ldots}$,

wo p und q Funktionen von x sind, Funktionen, die im Vorhergehenden durch $f'(x)$, $\phi'(x)$ oder auf eine andere ähnliche Art bezeichnet worden.

$p.dx$ ist also das Differential von u, und $q.dx$ das Differential von v.

Man dividire mit

$v + q.dx + \ldots$ in $u + p.dx + \ldots$

Hierdurch erhält man

$$\frac{u + pdx + \ldots}{v + qdx + \ldots} = \frac{u}{v} + \frac{pdx}{v} - \frac{uqdx}{v^2} + \ldots$$

Der Quotient ist nur bis auf die erste Potenz von dx gesucht worden, weil man ihn nur so weit nöthig hat.

Zieht man von demselben $\frac{u}{v}$ ab, so bleibt das Differential von $\frac{u}{v}$ übrig.

Man hat also

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{pdx}{v} - \frac{uqdx}{v^2},$$

oder, da $pdx = du$, und $qdx = dv$ ist,

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{du}{v} - \frac{udv}{v^2}$$
$$= \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

Man findet das Differential eines Bruchs, dessen Zähler und Nenner Funktionen von x sind, wenn man den Nenner mit dem Differential des Zählers, den Zähler mit dem Differential des Nenners multiplicirt, das letzte Produkt von dem ersten subtrahirt, und den erhaltenen Unterschied durch das Quadrat des Nenners dividirt.

§. 173. Man findet $d\left(\frac{u}{v}\right)$ auch auf folgende Art.

Es sey $\frac{u}{v} = z,$

also $u = vz$

$$du = vdz + zdv$$
$$du = v \cdot dz + \frac{u}{v} \cdot dv$$
$$vdz = du - \frac{u}{v} \cdot dv$$
$$dz = \frac{du}{v} - \frac{u}{v^2} \cdot dv$$

oder $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$

§. 174. Nach dem Bisherigen läßt sich das Differential eines jeden Bruchs, dessen Zähler und Nenner aus Faktoren bestehen, die Funktionen von x sind, finden. Soll man z. B. das Differential von $z = \frac{rst}{uvw}$ finden, so hat man

$$d\left(\frac{rst}{uvw}\right) = \frac{uvw \,.\, d\,(rst) - rst \,.\, d\,(uvw)}{u^2v^2w^2}$$

$$= \frac{uvw[rs.dt+rt.ds+st.dr]-rst.[uv.dw+uw.dv+vw.du]}{u^2v^2w^2}$$

$$\frac{rsuvw.dt+rtuvw.ds+stuvw.dr-rstuv.dw-rstuw.dv-rstvw.du}{u^2v^2w^2}$$

§. 175. Es sey $f(x) = \frac{u}{v}$, wo u und v Funktionen von x sind. Setzt man $x + k$ statt x, so erhält man

$$f(x+k) = \frac{u + pk + qk^2 + \ldots}{v + \mathfrak{p}k + \mathfrak{q}k^2 + \ldots}$$

$$= \frac{u}{v} + \left(\frac{p}{v} - \mathfrak{p}.\frac{u}{v^2}\right)k + \left(\frac{q}{v} - \mathfrak{q}.\frac{u}{v^2} - \frac{p\mathfrak{p}}{v^2} + \mathfrak{p}^2.\frac{u}{v^3}\right)k^2 + \ldots$$

Also ist

$$\frac{f(x+k) - f(x)}{k} = \left(\frac{p}{v} - \mathfrak{p}.\frac{u}{v^2}\right) + \left(\frac{q}{v} - \frac{\mathfrak{q}u + p\mathfrak{p}}{v^2} + \frac{\mathfrak{p}^2 u}{v^3}\right)k + \ldots$$

Nimmt hier k, also auch $f(x+k) - f(x)$ immerfort ab, so nähert sich das Verhältniß $\frac{f(x+k) - f(x)}{k}$ immerfort der Größe $\frac{p}{v} - \mathfrak{p} \,.\, \frac{u}{v^2}$ als seiner Grenze. Diese Größe ist aber, wie sich aus einer mit §. 172. angestellten Vergleichung leicht ergibt, der erste Differentialcoefficient von $\frac{u}{v}$.

§. 176. **Beispiele zur Uebung in der Differentiirung algebraischer Funktionen.**

Man soll differentiiren

1) $a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots + px^{n-1} + qx^n = u$

Es ist

$$du = [b+2cx+3dx^2+4ex^3+\ldots+(n-1)px^{n-2} + nqx^{n-1}].dx$$

$$d^2u = [2c + 2.3dx + 3.4ex^2 + \ldots + (n-2)(n-1)px^{n-3} + (n-1)\,nqx^{n-2}]\,dx^2$$

u. s. w.

2) $a + b\sqrt{x} - \frac{c}{x} = z$

Man kann hier auch schreiben

$$z = a + bx^{\frac{1}{2}} - c \cdot x^{-1},$$

woraus sich ergibt

$$dz = [\tfrac{1}{2}bx^{\frac{1}{2}-1} - - 1 \cdot cx^{-1-1}].dx$$
$$= [\tfrac{1}{2}bx^{-\frac{1}{2}} + cx^{-2}] \cdot dx$$
$$= \left[\frac{b}{2 \cdot \sqrt{x}} + \frac{c}{x^2}\right] \cdot dx$$

Der hier gefundene Ausdruck läßt sich nun, wenn man dx als eine beständige Größe ansieht, nach dem angewandten Verfahren wieder differentiiren, wodurch man d^2z erhält.

3) $(a + bx)^n = z.$

Man setze $a + bx = y$, also $(a + bx)^n = y^n$,

so hat man $dz = ny^{n-1}dy$

$$= n(a + bx)^{n-1} \cdot d(a + bx)$$
$$= n(a + bx)^{n-1} \cdot bdx$$
$$= nb(a + bx)^{n-1} \cdot dx$$

4) $(ax^p + bx^q)^n = z.$

Setzt man $(ax^p + bx^q)^n = y^n$,

so erhält man $dz = ny^{n-1}dy$

$$= n(ax^p + bx^q)^{n-1} \cdot d(ax^p + bx^q)$$
$$= n(ax^p + bx^q)^{n-1} \cdot (pax^{p-1} + qbx^{q-1}).dx$$

5) $\sqrt{(a + bx + cx^2)} = u.$

Es sey $a + bx + cx^2 = y$,

so ist $u = y^{\frac{1}{2}}$,

$$du = \tfrac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} \cdot dy$$
$$= \tfrac{1}{2}(a + bx + cx^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot d(a + bx + cx^2)$$
$$= \frac{b + 2cx}{2 \cdot \sqrt{(a + bx + cx^2)}} \cdot dx.$$

6) $\sqrt[4]{\left[[a - \frac{b}{\sqrt{x}} + \sqrt{(c^2 - x^2)^2}]^3\right]} = z$

Man kann auch schreiben

$$z = \left[[a - bx^{-\frac{1}{2}} + (c^2 - x^2)^{\frac{2}{3}}]^3 \right]^{\frac{1}{4}}$$

Setzt man $[a - bx^{-\frac{1}{2}} + (c^2 - x^2)^{\frac{2}{3}}]^3 = y$, so bekommt man

$$z = y^{\frac{1}{4}}$$

$$dz = \tfrac{1}{4} y^{-\frac{3}{4}} . dy$$

$$= \frac{dy}{4 . y^{\frac{3}{4}}}$$

$$= \frac{d([a - bx^{-\frac{1}{2}} + (c^2 - x^2)^{\frac{2}{3}}]^3)}{4 . [a - bx^{-\frac{1}{2}} + (c^2 - x^2)^{\frac{2}{3}}]^{\frac{9}{4}}}$$

$$= \frac{3 . [a - bx^{-\frac{1}{2}} + (c^2 - x^2)^{\frac{2}{3}}]^2 . d[a - bx^{-\frac{1}{2}} + (c^2 - x^2)^{\frac{2}{3}}]}{4 . [a - bx^{-\frac{1}{2}} + (c^2 - x^2)^{\frac{2}{3}}]^{\frac{9}{4}}}$$

Nun ist

$$d[a - bx^{-\frac{1}{2}} + (c^2 - x^2)^{\frac{2}{3}}] = \tfrac{1}{2} bx^{-\frac{3}{2}} . dx + \tfrac{2}{3}(c^2 - x^2)^{-\frac{1}{3}} . d(c^2 - x^2)$$

$$= [\tfrac{1}{2} bx^{-\frac{3}{2}} + \tfrac{2}{3}(c^2 - x^2)^{-\frac{1}{3}} . -2x] . dx$$

$$= \left[\frac{b}{2 . \sqrt{x^3}} - \frac{4x}{3 . \sqrt[3]{(c^2 - x^2)}} \right] . dx$$

Folglich

$$dz = \frac{\left[\frac{3b}{2 . \sqrt{x^3}} - \frac{4x}{\sqrt[3]{(c^2 - x^2)}} \right] . dx}{4 . \sqrt[4]{\left[a - \frac{b}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{(c^2 - x^2)} \right]^2}}$$

7) $(a^m + bx^n)^p . \sqrt[q]{(e^p - fx^r)^1} = y$

Es ist

$$dy = (a^m + bx^n)^p . d(e^p - fx^r)^{\frac{1}{q}} + (e^p - fx^r)^{\frac{1}{q}} . d(a^m + bx^n)^p$$

$$= \left\{ \begin{aligned} &(a^m + bx^n)^p . \tfrac{1}{q} . (e^p - fx^r)^{\frac{1}{q} - 1} . d(e^p - fx^r) \\ &+ (e^p - fx^r)^{\frac{1}{q}} . p(a^m + bx^n)^{p-1} . d(a^m + bx^n) \end{aligned} \right.$$

$$= \left\{ \begin{aligned} &(a^m + bx^n)^p . \tfrac{1}{q}(e^p - fx^r)^{\frac{1}{q} - 1} . -rfx^{r-1} . dx \\ &+ (e^p - fx^r)^{\frac{1}{q}} . p(a^m + bx^n)^{p-1} . nbx^{n-1} dx \end{aligned} \right.$$

$$= \left\{ \begin{aligned} &npb\,(e^p - fx^r)^{\frac{1}{q}} . (a^m + bx^n)^{p-1} . x^{n-1} . dx \\ &- r . \tfrac{1}{q} . f(a^m + bx^n)^p . (e^p - fx^r)^{\frac{1}{q} - 1} . x^{r-1} . dx \end{aligned} \right.$$

8) $\frac{a^2 - x^2}{a^4 + a^2x^2 + x^4} = u$

Man bekommt hier

$$du = \frac{(a^4+a^2x^2+x^4).d(a^2 - x^2) - (a^2-x^2).d(a^4 + a^2x^2 + x^4)}{(a^4 + a^2x^2 + x^4)^2}$$

Durch die Ausführung der angedeuteten Differentiationen und durch Reduction erhält man

$$du = \frac{-2x(2a^4 + 2a^2x^2 - x^4)}{(a^4 + a^2x^2 + x^4)^2} . dx$$

§. 177. Nimmt man an, $y = f(x)$ lasse sich durch eine Reihe von der Form $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$ ausdrücken, so hat man

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots$$
$$\frac{dy}{dx} = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \ldots$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2C + 2.3.Dx + 3.4.Ex^2 + \ldots$$
$$\frac{d^3y}{dx^3} = 2.3.D + 2.3.4.Ex + \ldots$$
$$\frac{d^4y}{dx^4} = 2.3.4.E + \ldots.$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Man setze $x = 0$ und bezeichne für diese Setzung

y durch (y)

$\frac{dy}{dx}$ $\left(\frac{dy}{dx}\right)$

$\frac{d^2y}{dx^2}$ $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$

$\frac{d^3y}{dx^3}$ $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$

$\frac{d^4y}{dx^4}$ $\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)$

. . . .

Hiernach ist also

$(y) = A$ und $A = (y)$

$\left(\frac{dy}{dx}\right) = B$ $B = \left(\frac{dy}{dx}\right)$

$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 2 . C$ $C = \frac{1}{2} . \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$

$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = 2 . 3 . D$ $D = \frac{1}{2.3} . \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$

$\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right) = 2 . 3 . 4 . E$ $E = \frac{1}{2.3.4} . \left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)$

. . . .

Folglich ist

$$y = f(x) = (y) + \left(\frac{dy}{dx}\right)x + \frac{1}{2} . \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)x^2 + \frac{1}{2.3} . \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)x^3 + \ldots$$

Diese Formel heißt die Maclaurinsche.

Ex. Es sey $y = (a + x)^n$,

$$\text{also } \frac{dy}{dx} = n(a + x)^{n-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = n(n - 1)(a + x)^{n-2}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = n(n - 1)(n - 2)(a + x)^{n-3}$$

. . . .

Man findet hieraus für $x = 0$

$$(y) = a^n$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = na^{n-1}$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = n(n - 1)a^{n-2}$$

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = n(n - 1)(n - 2)a^{n-3}$$

. . . .

Also ist $(a + x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n - 1)}{2}a^{n-2}x^2$

$$+ \frac{n(n - 1)(n - 2)}{2 . 3}a^{n-3}x^3 + \ldots$$

§. 178. Nach den bisherigen Lehren der Differentialrechnung kann man die Potenz eines Polynomiums leicht in eine Reihe auflösen.

Es seyen P und Q Funktionen von x, und $P^n = Q$; dann ist

$$n.P^{n-1}dP = dQ$$
$$nP^n dP = PdQ$$
$$\text{und } nQ\,.\,dP = PdQ$$

Nun sey $P = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \ldots,$

also $dP = (b + 2cx + 3dx^2 + 4ex^3 + \ldots)dx$

und $P^n = (a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \ldots)^n$

Man setze P^n oder $Q = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots$

also $dQ = (B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \ldots)dx$

Folglich ist

$$n(A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\ldots)(b+2cx+3dx^2+4ex^3+\ldots)dx$$
$$= (a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+\ldots)(B+2Cx+3Dx^2+4Ex^3+\ldots)dx$$

Dividirt man auf beiden Seiten dieser Gleichung durch dx, so erhält man eine Gleichung, aus welcher sich die Coefficienten A, B, C, ..., wie (§. 64.) bestimmen lassen.

Zweites Kapitel.

Differentiirung logarithmischer und exponentialer Funktionen.

§. 179. Aufg. Man soll das Differential von lg x suchen.

Aufl. Nach §. 81. ist

$$\lg(1+u) = Mu - \frac{Mu^2}{2} + \frac{Mu^3}{3} - \frac{Mu^4}{4} + \ldots,$$

wo $M = \lg e$ den Modulus bedeutet.

Hieraus erhält man

$$d\lg(1+u) = Mdu - Mudu + Mu^2du - Mu^3du + \ldots$$
$$= M(1 - u + u^2 - u^3 + \ldots)du$$

Der eingeklammerte Faktor ist $= \frac{1}{1+u}$. Also ist auch

$$d\,\lg(1+u) = M \,.\, \frac{du}{1+u}.$$

Setzt man nun $1 + u = x$, also $du = dx$, so bekommt man

$$d\,\lg x = M \,.\, \frac{dx}{x}.$$

§. 180. Für die natürlichen Logarithmen, deren Modulus $M = 1$ ist, hat man

$$d\,\lg x = \frac{dx}{x}.$$

§. 181. Man findet das Differential des natürlichen Logarithmen einer veränderlichen Größe, wenn man das Differential dieser Größe durch die Größe selbst dividirt, und das Differential des künstlichen Logarithmen einer veränderlichen Größe, wenn man das Differential des natürlichen Logarithmen derselben mit dem Modulus des künstlichen Systems multiplicirt.

In der Folge sollen, wenn nicht das Gegentheil erinnert wird, immer natürliche Logarithmen verstanden werden.

§. 182. Aufg. Man soll die höheren Differentiale von $\lg x$ finden.

Aufl. Man setze $y = \lg x$, so ist

$$dy = \frac{dx}{x}, \text{ und } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x},$$

also, da $\frac{1}{x}$ eine algebraische Funktion ist, nach (§. 160.)

$$\frac{d^2y}{dx} = -\frac{dx}{x^2}, \text{ und } \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{d^3y}{dx^2} = \frac{2dx}{x^3}, \text{ und } \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2}{x^3}$$

$$\frac{d^4y}{dx^3} = -\frac{6dx}{x^4}, \text{ und } \frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{6}{x^4}$$

. . . .

§. 183. Sucht man die höheren Differentiale von $u = \lg(1+x)$, so findet man

$$du = \frac{dx}{1+x}, \text{ und } \frac{du}{dx} = \frac{1}{1+x}$$

$$\frac{d^2u}{dx} = -\frac{dx}{(1+x)^2}, \text{ und } \frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$\frac{d^3u}{dx^2} = \frac{2dx}{(1+x)^3}, \text{ und } \frac{d^3u}{dx^3} = \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$\frac{d^4u}{dx^3} = -\frac{6dx}{(1+x)^4}, \text{ und } \frac{d^4u}{dx^4} = -\frac{6}{(1+x)^4}$$

. . . .

§. 184. Aufg. Man soll $u = \lg(1+x)$ durch die Differentialrechnung in einer Reihe ausdrücken, die nach den Potenzen von x fortschreitet.

Aufl. Man setze, es werde u zu u′, wenn x zu x + k wird, so ist nach dem Taylorschen Lehrsatze (§. 161.)

$$u' \text{ oder } \lg(1+x+k) = u + \frac{du}{dx}.k + \frac{d^2u}{1.2.dx^2}.k^2 + \frac{d^3u}{1.2.3.dx^3}k^3 + \ldots$$

oder

$$\lg(1+x+k) = \lg(1+x) + \frac{1}{1+x}.k - \frac{1}{1.2.(1+x)^2}.k^2$$
$$+ \frac{2}{1.2.3.(1+x)^3}.k^3 - \ldots$$

Man setze $x = 0$. Hierdurch erhält man

$$\lg(1+k) = k - \frac{k^2}{2} + \frac{k^3}{3} - \frac{k^4}{4} + \ldots$$

Also ist auch

$$\lg(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

§. 185. Es sey $y = \lg x$.

Verwandelt sich x in x + k und y in y + l, so ist

$$y + l = \lg(x+k)$$
$$= \lg\left[x.\left(1+\frac{k}{x}\right)\right]$$
$$= \lg x + \lg\left(1+\frac{k}{x}\right)$$

Da nun für jedes beliebige logarithmische System

$$\lg(1+u) = Mu - \frac{Mu^2}{2} + \frac{Mu^3}{3} - \ldots$$

ist, so ist auch

$$y + l = \lg x + M \cdot \frac{k}{x} - M \cdot \frac{k^2}{2x^2} + M \cdot \frac{k^3}{3x^3} - \ldots$$

Folglich ist

$$l = M \cdot \frac{k}{x} - M \cdot \frac{k^2}{2x^2} + M \cdot \frac{k^3}{3x^3} - \ldots$$

und $\frac{l}{k} = M \cdot \frac{1}{x} - M \cdot \frac{k}{2x^2} + M \cdot \frac{k^2}{3x^3} - \ldots$

Bei immer fortgehender Abnahme des k nähert sich das Verhältniß $\frac{l}{k}$ immerfort der Größe $M \cdot \frac{1}{x}$ als seiner Grenze. Der Differentialcoefficient $\frac{d \lg x}{dx} = M \cdot \frac{1}{x}$ kann also auch als die Grenze des Verhältnisses der Veränderung der veränderlichen Größe einer logarithmischen Funktion und der Veränderung der Funktion selbst angesehen werden.

§. 186. **Beispiele zur Uebung in der Differentiirung logarithmischer Funktionen.**

Es soll differentiirt werden

1) $\lg (a \pm bx)^n = u$.

Man setze $a \pm bx = y$, so ist

$$\lg (a \pm bx)^n = \lg y^n = n \cdot \lg y.$$

Nun ist $dn \cdot \lg y = n \cdot \frac{dy}{y}$ und $dy = \pm bdx$; also

$$d \lg (a + bx)^n = \pm \frac{n \cdot b \cdot dx}{a \pm bx}.$$

2) $\lg \frac{(a \pm bx)^m}{(c \mp bx)^n} = \lg (a \pm bx)^m - \lg (c \mp bx)^n$.

Es ist

$$d \lg \frac{(a \pm bx)^m}{(c \mp bx)^n} = \pm \frac{mbdx}{a \pm bx} \pm \frac{nbdx}{c \mp bx}$$

Setzt man hier $m = n = \frac{1}{2}$, $a = c$, $b = 1$, so erhält man

$$d \lg \left(\frac{a \pm x}{a \mp x}\right)^{\frac{1}{2}} = \pm \frac{a \cdot dx}{a^2 - x^2}.$$

3) $\lg (a \pm bx^m)$.

Setzt man hier $a \pm bx^m = y$, so hat man

$$d \lg (a \pm bx^m) = d \lg y = \frac{dy}{y} = \pm \frac{b \cdot mx^{m-1}dx}{a \pm bx^m}.$$

4) $\lg \frac{x^m}{(a \pm bx^n)^p} = m \cdot \lg x - p \cdot \lg (a \pm bx^n)$.

Es ist

$$d \lg \frac{x^m}{(a \pm bx^n)^p} = \frac{m \cdot dx}{x} \mp \frac{p \cdot b \cdot n \cdot x^{n-1} \cdot dx}{a \pm bx^n}.$$

Setzt man hier $b = 1$, $n = 2$, $p = \frac{1}{2}$, $m = 1$, so bekommt man

$$d \lg \frac{x}{\sqrt{(a \pm x^2)}} = \frac{adx}{x(a \pm x^2)}.$$

5) $\lg [x + \sqrt{(a + x^2)}] = \lg y$

Es ist $d \lg y = \frac{dy}{y}$, und $dy = \left[\frac{x + \sqrt{(a + x^2)}}{\sqrt{(a + x^2)}}\right] dx$

Also $d \lg [x + \sqrt{(a + x^2)}] = \frac{dx}{\sqrt{(a + x^2)}}$.

6) Es ist $\lg \left[\frac{\sqrt{(a + x^2)} + x}{\sqrt{(a + x^2)} - x}\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \lg \left[\frac{\sqrt{(a + x^2)} + x}{\sqrt{(a + x^2)} - x}\right]$

$= \frac{1}{2} \cdot \lg \left(\frac{[\sqrt{(a + x^2)} + x]^2}{a}\right) = \lg [\sqrt{(a + x^2)} + x] - \frac{1}{2} \lg a.$

Also ist auch

$$d \lg \left[\frac{\sqrt{(a + x^2)} + x}{\sqrt{(a + x^2)} - x}\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{dx}{\sqrt{(a + x^2)}}.$$

7) $\lg \frac{\sqrt{(a+x)} + \sqrt{(a-x)}}{\sqrt{(a+x)} - \sqrt{(a-x)}} = \lg \frac{2a + 2 \cdot \sqrt{(a+x)} \cdot \sqrt{(a-x)}}{2x}$

$= \lg \frac{a + \sqrt{(a^2 - x^2)}}{x}.$

Man findet hieraus

$$d \lg \frac{\sqrt{(a + x)} + \sqrt{(a - x)}}{\sqrt{(a + x)} - \sqrt{(a - x)}} = d \lg \frac{a + \sqrt{(a^2 - x^2)}}{x}$$

$$= - \frac{a\,dx}{x\sqrt{(a^2 - x^2)}}.$$

8) $(\lg x)^n = y$.

Es sey $\lg x = z$, so ist.

$$(\lg x)^n = z^n$$
$$d[(\lg x)^n] = nz^{n-1} \cdot dz$$
$$= n \cdot (\lg x)^{n-1} \cdot \frac{dx}{x} \cdot$$

9) $\lg \lg x$ (der Logarithme des Logarithmen von x).

Setzt man $\lg x = z$, so hat man

$$\lg \lg x = \lg z$$

und $d \lg \lg x = d \lg z = \frac{dz}{z}$

$$= \frac{dx}{x} : \lg x = \frac{dx}{x \cdot \lg x} \cdot$$

10) $\lg \lg \lg x$.

Man setze $\lg \lg x = z$

Also $\lg \lg \lg x = \lg z$

$$d \lg \lg \lg x = d \lg z$$
$$= \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x \cdot \lg x} : \lg \lg x$$
$$= \frac{dx}{x \cdot \lg x \cdot \lg \lg x} \cdot$$

§. 187. Durch Anwendung der logarithmischen Differentiale läßt sich ebenfalls die Potenz eines Polynomiums in eine Reihe verwandeln.

Nimmt man an, P und Q seyen beide Funktionen von x, und es sey

$$P^n = Q,$$

so ist $n \cdot \lg P = \lg Q$

und $n \cdot \frac{dP}{P} = \frac{dQ}{Q}$

also $nQ \cdot dP = PdQ$.

Setzt man nun

$$P = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \ldots$$

und $Q = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots$

und verfährt dann übrigens, wie §. 178., so erhält man die Gleichung daselbst, aus welcher sich die Coefficienten A, B, C, D, E, ... bestimmen lassen (§. 64.).




§. 188. Aufg. Man soll die Exponential-Größe a^x differentiiren.

Aufl. Nach §. 77. ist

$$a^x = 1 + \lg a . x + \frac{(\lg a)^2}{2} . x^2 + \frac{(\lg a)^3}{2.3} . x^3 + \frac{(\lg a)^4}{2.3.4} . x^4 + \ldots$$

Also

$$d(a^x) = \lg a . dx + (\lg a)^2 . x . dx + \frac{(\lg a)^3 . x^2}{2} . dx + \frac{(\lg a)^4 . x^3}{2.3} . dx + \ldots$$

$$= [1 + \lg a . x + \frac{(\lg a)^2}{2} . x^2 + \frac{(\lg a)^3}{2.3} . x^3 + \ldots] . \lg a . dx$$

$$= a^x . \lg a . dx$$

Man findet auch das Differential von a^x, wenn man setzt

$$a^x = u$$

Hieraus ergibt sich nämlich

$$x . \lg a = \lg u$$

$$dx . \lg a = \frac{du}{u}$$

$$du = u . \lg a . dx$$

$$= a^x . \lg a . dx$$

§. 189. Nach dem Bisherigen ist auch, wenn dx beständig angenommen wird,

$$d^2(a^x) = a^x . (\lg a)^2 . dx^2$$

$$d^3(a^x) = a^x . (\lg a)^3 . dx^3$$

. . . . . .

Für $a = e$, wo e die Basis des natürlichen Logarithmensystems, also $\lg a = \lg e = 1$ ist, erhält man

$$d(e^x) = e^x . dx$$

$$d^2(e^x) = e^x . dx^2$$

$$d^3(e^x) = e^x . dx^3$$

. . . .

§. 190. Aufg. $z^y = u$, wo z und y Funktionen von x sind, zu differentiiren.

Aufl. Es ist $\lg u = y . \lg z$

$$\frac{du}{u} = y . \frac{dz}{z} + \lg z . dy$$

$$du = z^y . [y . \frac{dz}{z} + \lg z . dy]$$
$$= z^{y-1} . y . dz + z^y . \lg z . dy$$

§. 191. Es sey $y^y = u$, so ist

$$du = y^y dy + y^y . \lg y . dy.$$
$$= (1 + \lg y) . y^y dy.$$

Drittes Kapitel.

Differentiirung trigonometrischer Funktionen.

§. 192. Aufg. Das Differential von Sin x zu finden.

Aufl. Es ist für den Halbmesser = 1 (§. 98.)

$$\mathrm{Sin}\, x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots$$

$$\text{Also } d\,\mathrm{Sin}\, x = dx - \frac{x^2}{1.2}.dx + \frac{x^4}{1.2.3.4}.dx - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}dx + \ldots$$
$$= \left[1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots\right] dx$$

Der eingeklammerte Faktor ist = Cos x. Also ist

$$d\,\mathrm{Sin}\, x = \mathrm{Cos}\, x . dx.$$

Man findet das Differential des Sinus, wenn man den Cosinus mit dem Differential des Kreisbogens multiplicirt.

§. 193. Aufg. Man soll das Differential eines Kreisbogens in einer Differential-Funktion des Sinus finden.

Aufl. Es sey Sin x = y, also Cos x = $\sqrt{(1 - y^2)}$, und nach der Bezeichnung (§. 104.)

$$\mathrm{arc.\,Sin}\, y = x$$

Folglich ist

$$d\,\mathrm{arc.\,Sin}\, y = dx$$

Setzt man die hier stehenden Werthe in die Gleichung

d Sin x = Cos x . dx, so erhält man

$$dy = \sqrt{(1 - y^2)} \,.\, d\,\text{arc. Sin}\, y$$

Folglich ist

$$d\,\text{arc. Sin}\, y = \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)}}$$
$$= (1 - y^2)^{-\frac{1}{2}} \,.\, dy$$

Man findet dieses auch auf folgende Art.

Es ist (§. 104.)

$$\text{arc. Sin}\, y = y + \frac{y^3}{2.3} + \frac{3.y^5}{2.4.5} + \frac{3.5.y^7}{2.4.6.7} + \frac{3.5.7.y^9}{2.4.6.8.9} + \ldots$$

Also

$$d\,\text{arc. Sin}\, y = dy + \frac{y^2}{2}.dy + \frac{3.y^4}{2.4}.dy + \frac{3.5.y^6}{2.4.6}.dy + \frac{3.5.7.y^8}{2.4.6.8}dy + \ldots$$
$$= \left[1 + \frac{y^2}{2} + \frac{3.y^4}{2.4} + \frac{3.5.y^6}{2.4.6} + \frac{3.5.7.y^8}{2.4.6.8} + \ldots\right].dy$$

Nun ist nach dem binomischen Lehrsatze

$$(1 - y^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{y^2}{2} + \frac{3.y^4}{2.4} + \frac{3.5.y^6}{2.4.6} + \frac{3.5.7.y^8}{2.4.6.8} + \ldots$$

Also ist

$$d\,\text{arc. Sin}\, y = (1 - y^2)^{-\frac{1}{2}}.dy$$
$$= \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)}}$$

Man findet das Differential eines Kreisbogens, wenn man das Differential seines Sinus durch den Cosinus dividirt.

§. 194. Man soll das Differential von Cos x finden.

Aufl. Es ist $\text{Cos}\, x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots$

(§. 98)

$$\text{Also } d\,\text{Cos}\, x = -x\,.\,dx + \frac{x^3}{1.2.3}.dx - \frac{x^5}{1.2.3.4.5}.dx + \ldots$$
$$= -\left[x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots\right].dx$$
$$= -\text{Sin}\, x\,.\,dx$$

Man findet das Differential des Cosinus, wenn man den verneint genommenen Sinus mit dem Differential des Bogens multiplicirt.

§. 195. Aufg. Man soll das Differential eines Kreisbogens in einer Differential-Funktion des Cosinus finden.

Aufl. Setzt man $\mathrm{Cos}\,x = y$, also $\mathrm{Sin}\,x = \sqrt{(1-y^2)}$, $\mathrm{arc.\,Cos}\,y = x$, und $d\,\mathrm{arc.\,Cos}\,y = dx$, so ist

$$dy = -\sqrt{(1-y^2)}\,.\,d\,\mathrm{arc.\,Cos}\,y$$

und $d\,\mathrm{arc.\,Cos}\,y = -\dfrac{dy}{\sqrt{(1-y^2)}}$.

Dieses Differential für $\mathrm{arc.\,Cos}\,y$ ergibt sich auch aus der Reihe (§. 105.).

§. 196. Aus $d\,\mathrm{Sin}\,x = \mathrm{Cos}\,x\,.\,dx$

und $d\,\mathrm{Cos}\,x = -\mathrm{Sin}\,x\,.\,dx$

ergibt sich, wenn man dx als beständig annimmt und weiter differentiirt,

$$d^2\,\mathrm{Sin}\,x = -\mathrm{Sin}\,x\,.\,dx^2$$
$$d^3\,\mathrm{Sin}\,x = -\mathrm{Cos}\,x\,.\,dx^3$$
$$d^4\,\mathrm{Sin}\,x = +\mathrm{Sin}\,x\,.\,dx^4$$
$$d^5\,\mathrm{Sin}\,x = +\mathrm{Cos}\,x\,.\,dx^5$$
$$d^6\,\mathrm{Sin}\,x = -\mathrm{Sin}\,x\,.\,dx^6$$
$$d^7\,\mathrm{Sin}\,x = -\mathrm{Cos}\,x\,.\,dx^7$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$d^2\,\mathrm{Cos}\,x = -\mathrm{Cos}\,x\,.\,dx^2$$
$$d^3\,\mathrm{Cos}\,x = +\mathrm{Sin}\,x\,.\,dx^3$$
$$d^4\,\mathrm{Cos}\,x = +\mathrm{Cos}\,x\,.\,dx^4$$
$$d^5\,\mathrm{Cos}\,x = -\mathrm{Sin}\,x\,.\,dx^5$$
$$d^6\,\mathrm{Cos}\,x = -\mathrm{Cos}\,x\,.\,dx^6$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

§. 197. Setzt man $\mathrm{Sin}\,u = y$, so ist nach §. 193.

$$du = (1-y^2)^{-\frac{1}{2}}\,.\,dy.$$

Hieraus findet man bei fortgesetzter Differentiation, wenn man dy als beständig annimmt,

$d^2u = (1-y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot y \cdot dy^2$

$d^3u = 3 \cdot y^2 \cdot (1-y^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot dy^3 + (1-y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot dy^3$

$d^4u = 3 \cdot 5 \cdot y^3 \cdot (1-y^2)^{-\frac{7}{2}} \cdot dy^4 + 3 \cdot (1-y^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot y \cdot dy^4$

. . . .

Setzt man $\text{Cos}\, u = y$, so erhält man für die höheren Differentiale d^2u, d^3u, ... die eben gefundenen Ausdrücke, nur mit verneinten Vorzeichen.

§. 198. Da $\text{Sin vers}\, x = 1 - \text{Cos}\, x$ ist, so ist auch

$$d \cdot \text{Sin vers}\, x = - d\, \text{Cos}\, x$$
$$= \text{Sin}\, x \cdot dx.$$

Heißt der Sinus versus y, und der zu demselben gehörige Bogen arc. Sin vers y, so ist

$$x = \text{arc. Sin vers}\, y$$
$$dx = d\, \text{arc. Sin vers}\, y$$
$$\text{Sin vers}\, x = y$$
$$d\, \text{Sin vers}\, x = dy$$
$$\text{Cos}\, x = 1 - y$$
$$\text{Cos}\, x^2 = 1 - 2y + y^2$$
$$\text{Sin}\, x^2 = 2y - y^2$$
$$\text{Sin}\, x = \sqrt{(2y - y^2)}$$

Also $dy = \sqrt{(2y - y^2)} \cdot d\, \text{arc. Sin vers}\, y$

und $d\, \text{arc. Sin vers}\, y = \dfrac{dy}{\sqrt{(2y - y^2)}}$.

Auf ähnliche Weise findet man

$$d\, \text{Cos vers}\, x = - \text{Cos}\, x \cdot dx$$

und $d\, \text{arc. Cos vers}\, y = - \dfrac{dy}{\sqrt{(2y - y^2)}}$.

§. 199. Es ist $\text{Tg}\, x = \dfrac{\text{Sin}\, x}{\text{Cos}\, x}$.

Also $d\, \text{Tg}\, x = \dfrac{\text{Cos}\, x \cdot d\, \text{Sin}\, x - \text{Sin}\, x \cdot d\, \text{Cos}\, x}{\text{Cos}\, x^2}$

$$= \frac{\text{Cos}\, x \cdot \text{Cos}\, x \cdot dx + \text{Sin}\, x \cdot \text{Sin}\, x \cdot dx}{\text{Cos}\, x^2}$$

$$= \frac{\text{Cos } x^2 + \text{Sin } x^2}{\text{Cos } x^2} . dx$$

$$= \frac{1}{\text{Cos } x^2} . dx$$

$$= \frac{dx}{\text{Cos } x^2} .$$

Das Differential der Tangente erhält man, wenn man das Differential des Bogens durch das Quadrat des Cosinus dividirt.

§. 200. Setzt man $\text{Tg } x = y$,

also $d \text{ Tg } x = dy$

$x = \text{arc. Tg } y$

$dx = d \text{ arc. Tg } y$

$\text{Sec } x^2 = 1 + y^2$

$\frac{1}{\text{Cos } x^2} = 1 + y^2$,

so erhält man

$$dy = (1 + y^2) . d \text{ arc. Tg } y$$

und $d \text{ arc. Tg } y = \frac{dy}{1 + y^2}$.

Man findet das Differential eines Kreisbogens in einer Differential-Funktion der Tangente, wenn man das Differential der Tangente durch das Quadrat der Secante dividirt.

§. 201. Es ist $\text{Sec } x = \frac{1}{\text{Cos } x}$

$$d \text{ Sec } x = - \frac{d \text{ Cos } x}{\text{Cos } x^2}$$

$$= \frac{\text{Sin } x . dx}{\text{Cos } x . \text{Cos } x}$$

$$= \frac{\text{Tg} x . dx}{\text{Cos } x} .$$

Es sey $\text{Sec } x = y$,

Also $d \text{ Sec } x = dy$

$x = \text{arc. Sec } y$

$$dx = d\,arc.\,Sec\,y$$

$$Cos\,x = \frac{1}{y}$$

$$Cos\,x^2 = \frac{1}{y^2}$$

$$Sin\,x = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{y^2}\right)},$$

$$\text{so ist } dy = \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{y^2}\right)} \,.\, d\,arc.\,Sec\,y}{\frac{1}{y^2}}$$

$$\text{Also } d\,arc.\,Sec\,y = \frac{1}{y^2 \,.\, \sqrt{\left(1 - \frac{1}{y^2}\right)}} \,.\, dy$$

$$= \frac{1}{y \,.\, \sqrt{(y^2 - 1)}} \,.\, dy.$$

Auf ähnliche Weise findet man

$$d\,Cot\,x = -\frac{dx}{Sin\,x^2}$$

$$d\,arc.\,Cot\,y = -\frac{dy}{1 + y^2}$$

$$d\,Cosec\,x = -\frac{Cos\,x\,.\,dx}{Sin\,x^2}.$$

$$= -\frac{Cot\,x\,.\,dx}{Sin\,x}$$

$$d\,arc.\,Cosec\,y = -\frac{1}{y} \,.\, \frac{1}{\sqrt{(y^2 - 1)}} \,.\, dy.$$

§. 202. Der bessern Uebersicht wegen werden hier die gefundenen Hauptdifferential-Formeln für trigonometrische Grössen wiederholt.

Es ist

1) $d\,Sin\,x = Cos\,x\,.\,dx$

2) $d\,Cos\,x = -Sin\,x\,.\,dx$

3) $d\,Sin\,vers\,x = Sin\,x\,.\,dx$

4) $d\,Cos\,vers\,x = -Cos\,x\,.\,dx$

5) $d\,\mathrm{Tg}\,x = \frac{dx}{\mathrm{Cos}\,x^2} = \mathrm{Sec}\,x^2 \,.\, dx$

6) $d\,\mathrm{Sec}\,x = \frac{\mathrm{Sin}\,x \,.\, dx}{\mathrm{Cos}\,x^2}$

7) $d\,\mathrm{Cot}\,x = -\frac{dx}{\mathrm{Sin}\,x^2}$

8) $d\,\mathrm{Cosec}\,x = -\frac{\mathrm{Cot}\,x \,.\, dx}{\mathrm{Sin}\,x} = -\mathrm{Cosec}\,x \,.\, \mathrm{Cot}\,x \,.\, dx$

9) $d\,arc.\,\mathrm{Sin}\,y = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)}}$

10) $d\,arc.\,\mathrm{Cos}\,y = -\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)}}$

11) $d\,arc.\,\mathrm{Sin\,vers}\,y = \frac{dy}{\sqrt{(2y-y^2)}}$

12) $d\,arc.\,\mathrm{Cos\,vers}\,y = -\frac{dy}{\sqrt{(2y-y^2)}}$

13) $d\,arc.\,\mathrm{Tg}\,y = \frac{dy}{1+y^2}$

14) $d\,arc.\,\mathrm{Sec}\,y = \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{\sqrt{(y^2-1)}} \,.\, dy$

15) $d\,arc.\,\mathrm{Cot}\,y = -\frac{dy}{1+y^2}$

16) $d\,arc.\,\mathrm{Cosec}\,y = -\frac{1}{y} \cdot \frac{1}{\sqrt{(y^2-1)}} \,.\, dy.$

§. 203. **Aufg.** Man soll Sin x = u vermittelst der Differentialrechnung in einer Reihe ausdrücken, die nach den Potenzen von x fortschreitet.

Aufl. Es verwandle sich u in u′, wenn sich x in x + k verwandelt. Nun ist nach dem Taylorschen Satze

$$u' \text{ oder } \mathrm{Sin}(x+k) = u + \frac{du}{dx}k + \frac{d^2u}{1.2.dx^2}.k^2 + \frac{d^3u}{1.2.3.dx^3}.k^3 + \frac{d^4u}{1.2.3.4.dx^4}.k^4 + \ldots$$

Es ist aber $u = \text{Sin}\,x$, $\frac{du}{dx} = \text{Cos}\,x$, $\frac{d^2u}{dx^2} = -\text{Sin}\,x$, $\frac{d^3u}{dx^3} = -\text{Cos}\,x$, u. s. w.

Folglich

$$\text{Sin}\,(x+k) = \text{Sin}\,x + \text{Cos}\,x\,.\,k - \frac{\text{Sin}\,x}{1.2}\,.\,k^2 - \frac{\text{Cos}\,x}{1.2.3}\,.\,k^3 + \frac{\text{Sin}\,x}{1.2.3.4}\,.\,k^4 + \ldots$$

Hieraus erhält man, wenn man $x = 0$ setzt,

$$\text{Sin}\,k = k - \frac{k^3}{1.2.3} + \frac{k^5}{1.2.3.4.5} - \ldots$$

Also ist auch

$$\text{Sin}\,x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots$$

§. 204. Aufg. Man soll einen Kreisbogen $\text{arc.}\,\text{Sin}\,y = u$ durch seinen Sinus y ausdrücken.

Aufl. Es werde u zu $u + l$, wenn y zu $y + k$ wird, so ist nach dem Taylorschen Satze

$$u + l \text{ oder } \text{arc.}\,\text{Sin}\,(y+k) = u + \frac{du}{dy}\,.\,k + \frac{d^2u}{1.2.dy^2}\,.\,k^2 + \frac{d^3u}{1.2.3.dy^3}\,.\,k^3 + \frac{d^4u}{1.2.3.4.dy^4}\,k^4 + \ldots$$

Nun ist nach §. 197.

$$\frac{du}{dy} = (1-y^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d^2u}{dy^2} = (1-y^2)^{-\frac{3}{2}}\,.\,y$$

$$\frac{d^3u}{dy^3} = 3\,.\,y^2\,.\,(1-y^2)^{-\frac{5}{2}} + (1-y^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{d^4u}{dy^4} = 3\,.\,5\,.\,y^3\,.\,(1-y^2)^{-\frac{7}{2}} + 3\,.\,(1-y^2)^{-\frac{5}{2}}\,.\,y$$

. . . .

Bringt man diese Werthe in die Gleichung für $u + l$, und setzt dann $y = 0$, wobei auch $u = 0$ wird, so erhält man

$$\text{arc. Sin}\, k = k + \frac{k^3}{1.2.3} + \frac{3.3.k^5}{1.2.3.4.5} + \ldots$$

Also ist auch

$$\text{arc. Sin}\, y = y + \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{9.y^5}{1.2.3.4.5} + \ldots \quad (§.\ 104.)$$

§. 205. Es sey $u = \text{Sin}\, x$.

Verwandelt sich x in $x + k$, so verwandle sich u in $u + l$. Man hat also

$$u + l = \text{Sin}\,(x + k)$$
$$= \text{Sin}\, x\,.\, \text{Cos}\, k + \text{Cos}\, x\,.\, \text{Sin}\, k$$

Folglich $l = \text{Sin}\, x\,.\, \text{Cos}\, k + \text{Cos}\, x\,.\, \text{Sin}\, k - \text{Sin}\, x$
$$= \text{Sin}\, x\,.\, (\text{Cos}\, k - 1) + \text{Cos}\, x\,.\, \text{Sin}\, k.$$

Nun ist $\text{Sin}\, k^2 + \text{Cos}\, k^2 = 1$

$$\text{Sin}\, k^2 = 1 - \text{Cos}\, k^2$$
$$= (1 - \text{Cos}\, k)(1 + \text{Cos}\, k)$$
$$1 - \text{Cos}\, k = \frac{\text{Sin}\, k^2}{1 + \text{Cos}\, k}$$
$$\text{Cos}\, k - 1 = -\frac{\text{Sin}\, k^2}{1 + \text{Cos}\, k}$$

Folglich ist

$$l = -\text{Sin}\, x\,.\, \frac{\text{Sin}\, k^2}{1 + \text{Cos}\, k} + \text{Cos}\, x\,.\, \text{Sin}\, k$$

und $\frac{l}{\text{Sin}\, k} = \text{Cos}\, x - \text{Sin}\, x\,.\, \frac{\text{Sin}\, k}{1 + \text{Cos}\, k}$ (A.)

Man nehme an, der Kreisbogen k nehme immerfort ab. Je kleiner der Bogen k wird, desto mehr nähert sich demselben sein Sinus und desto mehr das Verhältniß $\frac{l}{\text{Sin}\, k}$ dem Verhältniß $\frac{l}{k}$. Denn es ist $\text{Tg}\, k = \frac{\text{Sin}\, k}{\text{Cos}\, k}$ und $\text{Cos}\, k = \frac{\text{Sin}\, k}{\text{Tg}\, k}$. Je kleiner nun k wird, desto mehr nähert sich $\text{Cos}\, k$ und also auch $\frac{\text{Sin}\, k}{\text{Tg}\, k}$ der Einheit. Nun ist aber immer $k < \text{Tg}\, k$ und $> \text{Sin}\, k$, also muß sich um so viel mehr, bei immerfortgehender Abnahme des k, die Größe $\frac{\text{Sin}\, k}{k}$ der Einheit nähern, d. h. je kleiner k wird, desto mehr nähert sich demselben Sin k

und desto mehr also auch das Verhältniß $\frac{1}{\mathrm{Sin}\,k}$ dem Verhältnisse $\frac{1}{k}$. Ferner: je mehr k abnimmt, desto kleiner wird Sin k und desto mehr nähert sich der Ausdruck $\mathrm{Cos}\,x - \mathrm{Sin}\,x \cdot \frac{\mathrm{Sin}\,k}{1+\mathrm{Cos}\,k}$ der Größe Cos x. Bei fortgehender Abnahme des k nähern sich also die beiden Seiten der Gleichung (A.) dem Differentialverhältnisse $\frac{d\,\mathrm{Sin}\,x}{dx} = \frac{\mathrm{Cos}\,x}{1}$ als ihrer Grenze.

§. 206. Es sey $u = \mathrm{Cos}\,x$, und es verwandle sich u in $u + l$, wenn sich x in $x + k$ verwandelt, so ist

$$u + l = \mathrm{Cos}\,(x+k)$$
$$= \mathrm{Cos}\,x \,.\, \mathrm{Cos}\,k - \mathrm{Sin}\,x \,.\, \mathrm{Sin}\,k$$
$$l = \mathrm{Cos}\,x \,.\, \mathrm{Cos}\,k - \mathrm{Sin}\,x \,.\, \mathrm{Sin}\,k - \mathrm{Cos}\,x$$
$$= \mathrm{Cos}\,x\,(\mathrm{Cos}\,k - 1) - \mathrm{Sin}\,x \,.\, \mathrm{Sin}\,k$$
$$= -\,\mathrm{Cos}\,x \left(\frac{\mathrm{Sin}\,k^2}{1+\mathrm{Cos}\,k}\right) - \mathrm{Sin}\,x \,.\, \mathrm{Sin}\,k$$
$$\frac{l}{\mathrm{Sin}\,k} = -\,\mathrm{Cos}\,x \left(\frac{\mathrm{Sin}\,k}{1+\mathrm{Cos}\,k}\right) - \mathrm{Sin}\,x.$$

Ueberlegungen, wie die im vorigen §. angestellten, zeigen, daß, bei fortgehender Abnahme des k, das Verhältniß $\frac{l}{\mathrm{Sin}\,k}$ sich dem Verhältniß $\frac{d\,\mathrm{Cos}\,x}{dx} = -\,\mathrm{Sin}\,x$ immerfort als seiner Grenze nähert.

§. 207. Beispiele zur Uebung in der Differentiirung trigonometrischer Funktionen.

Man soll differentiiren

1) $y = \sqrt{\frac{1+\mathrm{Cos}\,x}{2}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(1+\mathrm{Cos}\,x)}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1+\mathrm{Cos}\,x)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Es ist } d(1+\mathrm{Cos}\,x)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\,.\,(1+\mathrm{Cos}\,x)^{-\frac{1}{2}}\,.\,d\,\mathrm{Cos}\,x$$
$$= \tfrac{1}{2}\,.\,(1+\mathrm{Cos}\,x)^{-\frac{1}{2}}\,.\,-\mathrm{Sin}\,x\,.\,dx$$
$$= -\frac{\mathrm{Sin}\,x\,.\,dx}{2\,.\,\sqrt{(1+\mathrm{Cos}\,x)}}$$

$$\text{Also } dy = -\frac{\mathrm{Sin}\,x\,.\,dx}{2\,.\,\sqrt{2}\,.\,\sqrt{(1+\mathrm{Cos}\,x)}}$$
$$= -\frac{\mathrm{Sin}\,x\,.\,dx}{2.\sqrt{[2\,.\,(1+\mathrm{Cos}\,x)]}}$$

Nun ist nach trigonometrischen Gründen

$$\sqrt{\frac{1+\mathrm{Cos}\,x}{2}} = \mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}x$$

$$\text{Folglich } 2\,.\,\sqrt{\frac{1+\mathrm{Cos}\,x}{2}} = 2\,.\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}x$$
$$\sqrt{\left[4\,.\,\frac{1+\mathrm{Cos}\,x}{2}\right]} = 2\,.\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}x$$
$$\sqrt{[2\,.\,(1+\mathrm{Cos}\,x)]} = 2\,.\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}x$$

$$\text{Also } dy = -\frac{\mathrm{Sin}\,x\,.\,dx}{2\,.\,2\,.\,\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}x}$$

Es ist ferner nach Gründen der Trigonometrie

$$\mathrm{Sin}\,x = 2\,.\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}x\,.\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}x.$$

$$\text{Folglich } dy = -\frac{2\,.\,\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}x\,.\,\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}x\,.\,dx}{2\,.\,2\,.\,\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}x}$$
$$= -\tfrac{1}{2}\,.\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}x\,.\,dx.$$

Dieses stimmt mit Folgendem überein.

$$\text{Es ist } y = \sqrt{\frac{1+\mathrm{Cos}\,x}{2}} = \mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}x$$
$$\text{Also } dy = d\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}x = -\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}x\,.\,d\,\tfrac{1}{2}x$$
$$= -\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}x\,.\,dx.$$

2) $y = a^{\mathrm{Sin}\,x}$

$$\text{Es ist } \lg y = \mathrm{Sin}\,x\,.\,\lg a$$
$$\frac{dy}{y} = \lg a\,.\,\mathrm{Cos}\,x\,.\,dx$$
$$dy = \lg a\,.\,a^{\mathrm{Sin}\,x}\,.\,\mathrm{Cos}\,x\,.\,dx$$

Für $a = e =$ der Basis des natürlichen Logarithmensystems ist

$$dy = d(e^{\text{Sin}\,x}) = e^{\text{Sin}\,x} \,.\, \text{Cos}\,x \,.\, dx.$$

3) $z = \text{arc. Sin}\,2x \,.\, \sqrt{(1 - x^2)}$.

Setzt man $2x \,.\, \sqrt{(1 - x^2)} = y$,

also $z = \text{arc. Sin}\,y$,

so ist $dz = \dfrac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)}}$.

Nun ist $dy = \dfrac{(2 - 4x^2) \,.\, dx}{\sqrt{(1 - x^2)}}$

und $\sqrt{(1 - y^2)} = 1 - 2x^2$.

Also $dz = \dfrac{2 \,.\, dx}{\sqrt{(1 - x^2)}}$.

Man findet dieses auch auf folgende Art.

Da $z = \text{arc. Sin}\,2x \,.\, \sqrt{(1 - x^2)}$ ist, so ist auch

$$\text{Sin}\,z = 2x \,.\, \sqrt{(1 - x^2)}$$

$$\begin{aligned}\text{Cos}\,z &= \sqrt{[1 - 4x^2(1 - x^2)]} \\ &= \sqrt{[1 - 4x^2 + 4x^4]} \\ &= \sqrt{(1 - 2x^2)^2} \\ &= 1 - 2x^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d\,\text{Sin}\,z &= d[2x \,.\, \sqrt{(1 - x^2)}] \\ \text{Cos}\,z \,.\, dz &= d[4x^2 - 4x^4]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{8x(1 - 2x^2)\,dx}{4x \,.\, \sqrt{(1 - x^2)}} \\ &= \frac{2 \,.\, (1 - 2x^2) \,.\, dx}{\sqrt{(1 - x^2)}}\end{aligned}$$

$$dz = \frac{2 \,.\, dx}{\sqrt{(1 - x^2)}}.$$

4) $z = a^{\text{arc. Sin}\,x}$.

Es ist $\lg z = \text{arc. Sin}\,x \,.\, \lg a$

Also $\dfrac{dz}{z} = \lg a \,.\, \dfrac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)}}$

$$dz = \lg a \,.\, a^{\text{arc. Sin}\,x} \,.\, \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)}}.$$

Für $a = e$ ist $\lg a = \lg e = 1$, also

$$dz = d[e^{\text{arc. Sin } x}] = e^{\text{arc. Sin } x} \cdot \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)}}.$$

Viertes Kapitel.

Von der Differentiirung der Gleichungen mit zwei veränderlichen Größen.

§. 208. Enthält eine Gleichung zwei veränderliche Grössen x und y, so läßt sie sich nach den bisherigen Vorschriften differentiiren. Denn die eine von den veränderlichen Größen z. B. y ist eine Funktion von der andern x. (§. 106.)

I. Eine Gleichung enthalte die zwei veränderlichen Grössen x und y gesondert.

Ex. 1. Es sey $y^2 = x - x^2$.

Hieraus ergibt sich nach den vorhergehenden Vorschriften für die Differentiation

$$2y\,dy = (1 - 2x) \cdot dx$$

$$dy = \frac{1 - 2x}{2y} \cdot dx,$$

oder, da $y = \sqrt{(x - x^2)}$ ist,

$$dy = \pm \frac{1 - 2x}{2 \cdot \sqrt{(x - x^2)}} \cdot dx.$$

Dies stimmt mit Folgendem überein. Aus der gegebenen Gleichung folgt

$$y = \sqrt{(x - x^2)}$$

$$= (x - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

und hieraus ergibt sich

$$dy = \tfrac{1}{2} \cdot (x - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (dx - 2x\,dx)$$

$$= \pm \frac{1 - 2x}{2 \cdot \sqrt{(x - x^2)}} \cdot dx.$$

Ex. 2. Es sey $y^2 + y = ax - x^2$.

Man findet hieraus $(2y + 1)\,dy = (a - 2x)\,dx$

$$dy = \frac{a - 2x}{2y + 1} \cdot dx.$$

Aus der Gleichung $y^2 + y = ax - x^2$ ergibt sich, wenn man sie als eine quadratische in Beziehung auf y auflöset,

$$y = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{(4ax - 4x^2 + 1)}.$$

Also ist

$$dy = \frac{a - 2x}{\pm \sqrt{(4ax - 4x^2 + 1)}} \cdot dx.$$

Man findet diesen Ausdruck für dy auch auf folgende Art. Da

$$y = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{(4ax - 4x^2 + 1)}$$

ist, so ist

$$dy = \pm \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot (4ax - 4x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot d\,(4ax - 4x^2 + 1)$$

$$= \pm \frac{(4a - 8x) \cdot dx}{4 \cdot \sqrt{(4ax - 4x^2 + 1)}} = \pm \frac{a - 2x}{\sqrt{(4ax - 4x^2 + 1)}} \cdot dx.$$

II. Eine Gleichung enthalte die zwei veränderlichen Grössen x und y ungesondert. Siehe Einl. §. 106.

Ex. Es sey

$$y^2 - 2mxy + x^2 - a^2 = 0$$

$$\text{oder } y^2 - 2mxy = a^2 - x^2.$$

Man findet hieraus nach den vorhergehenden Vorschriften für die Differentiation

$$2y\,dy - 2mx\,dy - 2my\,dx = -2x\,dx,$$

$$\text{oder } (y - mx)\,dy = (my - x)\,dx.$$

$$\text{Also } dy = \frac{my - x}{y - mx} \cdot dx \quad (A.)$$

Nun ergibt sich aus der Gleichung

$$y^2 - 2mxy = a^2 - x^2,$$

wenn man sie in Beziehung auf y auflöset,

$$y = mx \pm \sqrt{(a^2 - x^2 + m^2x^2)}.$$

Durch Substitution dieses Werthes für y in die Gleichung (A.) erhält man

$$dy = \frac{m^2x \pm m\sqrt{(a^2 - x^2 + m^2x^2)} - x}{\pm \sqrt{(a^2 - x^2 + m^2x^2)}} \cdot dx \quad (B.)$$

Hiermit stimmt überein, was man durch folgendes Verfahren findet.

Da
$$y = mx \pm \sqrt{(a^2 - x^2 + m^2x^2)}$$
ist, so ist
$$dy = mdx \pm \tfrac{1}{2} \cdot (a^2 - x^2 + m^2x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2m^2x - 2x) \cdot dx$$
$$= \left[m + \frac{2m^2x - 2x}{\pm 2 \cdot \sqrt{(a^2 - x^2 + m^2x^2)}}\right] \cdot dx$$
$$= \frac{\pm m \cdot \sqrt{(a^2 - x^2 + m^2x^2)} + m^2x - x}{\pm \sqrt{(a^2 - x^2 + m^2x^2)}} \cdot dx.$$

§. 209. Aus der Gleichung (A.) erhält man
$$y = \frac{x\,(mdy - dx)}{dy - mdx}.$$

Setzt man diesen Werth für y in die Gleichung
$$y^2 - 2mxy + x^2 - a^2 = 0$$
und reducirt gehörig, so bekommt man
$$\left.\begin{array}{l}(x^2 - a^2 - m^2x^2)\,dy^2 - (2mx^2 - 2ma^2 - 2m^3x^2)\,dx\,dy \\ \qquad + (x^2 - m^2x^2 - a^2m^2)\,dx^2\end{array}\right\} = 0.$$

Hieraus ergibt sich ferner
$$\left.\begin{array}{l}(x^2 - a^2 - m^2x^2) \cdot \dfrac{dy^2}{dx^2} - (2mx^2 - 2ma^2 - 2m^3x^2) \cdot \dfrac{dy}{dx} \\ \qquad + (x^2 - m^2x^2 - a^2m^2)\end{array}\right\} = 0$$
und hieraus
$$\frac{dy^2}{dx^2} - 2m \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{x^2 - m^2x^2 - a^2m^2}{x^2 - a^2 - m^2x^2} = 0.$$

Löst man diese Gleichung in Beziehung auf $\frac{dy}{dx}$ auf, so erhält man die zwei Werthe für $\frac{dy}{dx}$, welche sich für diesen Differentialcoefficienten aus (B.) ergeben und welche sich, da es für y zwei Werthe gibt, für denselben ergeben müssen.

§. 210. In der Gleichung
$$y^3 - 3axy + x^3 = 0 \ (C.)$$
hat y, als eine Funktion von x betrachtet, drei Werthe. Diese drei Werthe, nach einander in den Differentialcoefficienten $\frac{dx}{dy}$, der sich nach den bisherigen Regeln der Differentiation

aus der Gleichung (C.) ergibt, substituirt, geben drei Werthe für $\frac{dy}{dx}$ u. s. w.

§. 211. Setzt man dx beständig, so ist der Differentialcoefficient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{my - x}{y - mx},$$

den man aus (A.) erhält, eine Funktion bloß von x.

Man erhält aus diesem Ausdruck, wenn man ihn differentiirt,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{m^2y - y + (x - m^2x) \cdot \frac{dy}{dx}}{(y - mx)^2}.$$

Setzt man für $\frac{dy}{dx}$ seinen Werth, so bekommt man

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{m^2y - y + (x - m^2x)\frac{my - x}{y - mx}}{(y - mx)^2}.$$

Hieraus ergibt sich durch die gehörigen Reduktionen

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(m^2 - 1) \cdot (y^2 - 2mxy + x^2)}{(y - mx)^3}.$$

§. 212. Es sey

$$Ax^ky^l + Bx^my^n + Cx^py^q + \ldots (\mathfrak{A}.) = 0.$$

Differentiirt man diesen Ausdruck nach den bisherigen Vorschriften, so erhält man

$$\left.\begin{array}{ll} Aky^lx^{k-1}dx & + Alx^ky^{l-1}dy \\ + Bmy^nx^{m-1}dx & + Bnx^my^{n-1}dy \\ + Cpy^qx^{p-1}dx & + Cqx^py^{q-1}dy \\ + \;\vdots & + \;\vdots \end{array}\right| =$$

$$\left.\begin{array}{l} = [Aky^lx^{k-1} + Bmy^nx^{m-1} + Cpy^qx^{p-1} + \ldots]dx \\ + [Alx^ky^{l-1} + Bnx^my^{n-1} + Cqx^py^{q-1} + \ldots]dy \end{array}\right\} = 0.$$

§. 213. Man findet dieses Resultat auch auf folgende Art:

Erstens: Man differentiire (𝔄.) so, wie wenn y eine beständige und nur x eine veränderliche Größe wäre. Hierdurch bekommt man

$$Aky^lx^{k-1}dx + Bmy^nx^{m-1}dx + Cpy^qx^{p-1}dx + \ldots$$
$$= [Aky^lx^{k-1} + Bmy^nx^{m-1} + Cpy^qx^{p-1} + \ldots] dx.$$

Zweitens: Man differentiire (A.) so, wie wenn x eine beständige und nur y eine veränderliche Größe wäre. Man erhält so

$$Alx^ky^{l-1}dy + Bnx^my^{n-1}dy + Cqx^py^{q-1}dy + \ldots$$
$$= [Alx^ky^{l-1} + Bnx^my^{n-1} + Cqx^py^{q-1} + \ldots] dy.$$

Drittens: Man addire das in Erstens und Zweitens Gefundene und setze die Summe = 0. Man bekommt hierdurch

$$\left.\begin{array}{l}[Aky^lx^{k-1} + Bmy^nx^{m-1} + Cpy^qx^{p-1} + \ldots].dx \\ + [Alx^ky^{l-1} + Bnx^my^{n-1} + Cqx^py^{q-1} + \ldots] dy\end{array}\right\} = 0. \quad \text{(B.)}$$

§. 214. Eben so findet man einerlei Resultat, man mag die Gleichung

$$Ax^ky^l + [Bx^my^n + Cx^py^q + \ldots.]^r = 0$$

nach §. 212., oder nach §. 213. differentiiren.

§. 215. Ueberhaupt ist es einerlei, ob man eine Gleichung zwischen zwei veränderlichen Größen nach §. 212., oder nach §. 213 differentiirt.

§. 216. Aus (B.) erhält man den Differentialcoefficienten

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{Aky^lx^{k-1} + Bmy^nx^{m-1} + Cpy^qx^{p-1} + \ldots}{Alx^ky^{l-1} + Bnx^my^{n-1} + Cqx^py^{q-1} + \ldots} \quad \text{(C.)}$$

und sieht wohl, daß man den Differentialcoefficienten $\frac{d^2y}{dx^2}$ auch findet, wenn man den Ausdruck (C.) nach Erstens und Zweitens (§. 213.) behandelt und die beiden sich ergebenden Resultate addirt.

§. 217. Das Differential einer Gleichung zwischen zwei veränderlichen Größen x und y kann ausgedrückt werden durch

$$P\,dx + Q\,dy = 0,$$

wo sowohl P als Q die Größen x und y enthalten kann.

Fünftes Kapitel.

Von der Differentiirung solcher Funktionen, in denen zwei von einander unabhängige, veränderliche Größen vorkommen.

§. 218. Es stelle $f(x, y)$ eine Funktion von x und y dar, wo x und y von einander unabhängige, veränderliche Größen bedeuten. Die Funktion $f(x, y)$ werde, wenn sich x in $x+k$, und y in $y+l$ verwandelt, durch $f(x+k, y+l)$ dargestellt. Was aus der Funktion $f(x, y)$ wird, wenn man in derselben $x+k$ statt x setzt und y als unveränderlich annimmt, sey angedeutet durch $f(x+k, y)$. Auf ähnliche Weise deute man, was aus $f(x, y)$ entspringt, wenn man x als unveränderlich annimmt und $y+l$ statt y setzt, durch $f(x, y+l)$ an.

Der $m$te Differentialcoefficient, den man erhält, wenn man annimmt, in $f(x, y) = u$ sey x veränderlich und y beständig, werde ausgedrückt durch $\frac{d^m u}{dx^m}$. Der $n$te Differentialcoefficient, den man aus dem Ausdruck $\frac{d^m u}{dx^m}$, der eine Funktion von x und y ist, findet, wenn man x als beständig und y als veränderlich setzt, werde durch $\frac{d^n\left(\frac{d^m u}{dx^m}\right)}{dy^n}$ oder kürzer durch $\frac{d^{m+n}u}{dx^m dy^n}$ bezeichnet. Die Ausdrücke $\frac{d^m\left(\frac{d^n u}{dy^n}\right)}{dx^m}$ und $\frac{d^{n+m}u}{dy^n dx^m}$ bedeuten den Differentialcoefficienten, den man bekommt, wenn man $f(x, y) = u$ zuerst $n$mal so differentiirt,

als sey y veränderlich und x beständig, und alsdann den hieraus sich ergebenden Ausdruck $\frac{d^n u}{dy^n}$, mmal so, als sey y beständig und x veränderlich.

§. 219. Lehrs. Der Differentialcoefficient, den man erhält, wenn man f(x, y) zuerst so differentiirt, als sey x veränderlich und y beständig, und alsdann den hieraus sich ergebenden Differentialcoefficienten so, als sey x beständig und y veränderlich, ist gleich dem Differentialcoefficienten, den man bekommt, wenn man f(x, y) zuerst so differentiirt, als sey y veränderlich und x beständig, und alsdann den hieraus hervorgehenden Differentialcoefficienten so, als sey x veränderlich und y beständig.

Bew. Man nehme an, y sey unveränderlich und x verwandle sich in x + k, so ist, wenn man der Kürze wegen f(x, y) = u setzt, nach dem Taylorschen Lehrsatze f(x+k, y) =

$$u + \frac{du}{dx} \cdot \frac{k}{1} + \frac{d^2u}{dx^2} \cdot \frac{k^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3} \cdot \frac{k^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{d^mu}{dx^m} \cdot \frac{k^m}{1.2\ldots m} + \ldots$$

Das u, so wie die Differentialcoefficienten $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^3u}{dx^3}$, ... sind Funktionen von x und y.

Nimmt man nun weiter an, in diesen Funktionen, so wie in der Funktion f(x + k, y) sey das x beständig, und das y verändere sich in y + l, so verwandelt sich

f(x + k, y) in f(x + k, y + l)

$$u \text{ in } u + \frac{du}{dy} \cdot \frac{l}{1} + \frac{d^2u}{dy^2} \cdot \frac{l^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dy^3} \cdot \frac{l^3}{1.2.3} + \ldots$$

$$\frac{du}{dx} \text{ in } \frac{du}{dx} + \frac{d\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy} \cdot \frac{l}{1} + \frac{d^2\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy^2} \cdot \frac{l^2}{1.2} + \frac{d^3\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy^3} \cdot \frac{l^3}{1.2.3} + \ldots$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} \text{ in } \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)}{dy} \cdot \frac{l}{1} + \frac{d^2\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)}{dy^2} \cdot \frac{l^2}{1.2} + \frac{d^3\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)}{dy^3} \cdot \frac{l^3}{1.2.3} + \ldots$$

$$\frac{d^3u}{dx^3} \text{ in } \frac{d^3u}{dx^3} + \frac{d\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)}{dy} \cdot \frac{l}{1} + \frac{d^2\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)}{dy^2} \cdot \frac{l^2}{1.2} + \frac{d^3\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)}{dy^3} \cdot \frac{l^3}{1.2.3} + \ldots$$

. . . .

$$\frac{d^mu}{dx^m} \text{ in } \frac{d^mu}{dx^m} + \frac{d\left(\frac{d^mu}{dx^m}\right)}{dy} \cdot \frac{l}{1} + \ldots + \frac{d^n\left(\frac{d^mu}{dx^m}\right)}{d^n} \cdot \frac{l^n}{1.2\ldots n} + \ldots$$

oder

$f(x+k, y)$ in $f(x+k, y+l)$,

$$u \text{ in } u + \frac{du}{dy} \cdot \frac{l}{1} + \frac{d^2u}{dy^2} \cdot \frac{l^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dy^3} \cdot \frac{l^3}{1.2.3} + \ldots$$

$$\frac{du}{dx} \text{ in } \frac{du}{dx} + \frac{d^2u}{dxdy} \cdot \frac{l}{1} + \frac{d^3u}{dxdy^2} \cdot \frac{l^2}{1.2} + \frac{d^4u}{dxdy^3} \cdot \frac{l^3}{1.2.3} + \ldots$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} \text{ in } \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^3u}{dx^2dy} \cdot \frac{l}{1} + \frac{d^4u}{dx^2dy^2} \cdot \frac{l^2}{1.2} + \frac{d^5u}{dx^2dy^3} \cdot \frac{l^3}{1.2.3} + \ldots$$

$$\frac{d^3u}{dx^3} \text{ in } \frac{d^3u}{dx^3} + \frac{d^4u}{dx^3dy} \cdot \frac{l}{1} + \frac{d^5u}{dx^3dy^2} \cdot \frac{l^2}{1.2} + \frac{d^6u}{dx^3dy^3} \cdot \frac{l^3}{1.2.3} + \ldots$$

. . . .

$$\frac{d^mu}{dx^m} \text{ in } \frac{d^mu}{dx^m} + \frac{d^{m+1}u}{dx^mdy} \cdot \frac{l}{1} + \ldots + \frac{d^{m+n}u}{dx^mdy^n} \cdot \frac{l^n}{1.2\ldots n} + \ldots$$

Setzt man nun statt der Ausdrücke $f(x+k, y)$, u, $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^3u}{dx^3}$, ... das, wozu sie bei der Setzung von $y+l$ für y werden, so erhält man aus der Gleichung für $f(x+k, y)$ folgende

$f(x+k, y+l) =$

$$
\left\{
\begin{array}{l}
u + \frac{du}{dy} \cdot \frac{l}{1} + \frac{d^2u}{dy^2} \cdot \frac{l^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dy^3} \cdot \frac{l^3}{1.2.3} + \ldots \\
+ \frac{du}{dx} \cdot \frac{k}{1} + \frac{d^2u}{dxdy} \cdot \frac{l}{1} \cdot \frac{k}{1} + \frac{d^3u}{dxdy^2} \cdot \frac{l^2}{1.2} \cdot \frac{1}{k} + \frac{d^4u}{dxdy^3} \cdot \frac{l^3}{1.2.3} \cdot \frac{k}{1} + \ldots \\
+ \frac{d^2u}{dx^2} \cdot \frac{k^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^2dy} \cdot \frac{l}{1} \cdot \frac{k^2}{1.2} + \frac{d^4u}{dx^2dy^2} \cdot \frac{l^2}{1.2} \cdot \frac{k^2}{1.2} + \frac{d^5u}{dx^2dy^3} \cdot \frac{l^3}{1.2.3} \cdot \frac{k^2}{1.2} + \ldots \\
+ \frac{d^3u}{dx^3} \cdot \frac{k^3}{1.2.3} + \frac{d^4u}{dx^3dy} \cdot \frac{l}{1} \cdot \frac{k^3}{1.2.3} + \frac{d^5u}{dx^3dy^2} \cdot \frac{l^2}{1.2} \cdot \frac{k^3}{1.2.3} + \frac{d^6u}{dx^3dy^3} \cdot \frac{l^3}{3.2.1} \cdot \frac{k^3}{1.2.3} + \ldots \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot
\end{array}
\right\} \quad (\odot)
$$

Das allgemeine Glied des Ausdrucks (☉) ist $\frac{d^{m+n}u}{dx^m dy^n} \cdot \frac{l^n}{1.2..n} \cdot \frac{k^m}{1.2...m}$.

Man hat den Ausdruck (☉) dadurch gefunden, daß man angenommen hat, in $f(x, y)$ sey y beständig und x verwandle sich in $x + k$; daß man darauf ferner in der Entwicklung, welche sich aus dieser Annahme für $f(x + k, y)$ ergeben, statt y, $y + l$ gesetzt hat. Man nehme nun zuerst an, es sey x beständig und y verwandle sich in $y + l$; alsdann setze man in die Entwicklung, die sich für $(x, y + l)$ ergibt, $x + k$ statt x. Hierdurch erhält man

erstens $f(x, y + l) =$

$$u + \frac{du}{dy} \cdot \frac{l}{1} + \frac{d^2u}{dy^2} \cdot \frac{l^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dy^3} \cdot \frac{l^3}{1.2.3} + .. + \frac{d^nu}{dy^n} \cdot \frac{l^n}{1.2...n} + ...$$

und, wenn man die Glieder jeder Reihe, die man bei Setzung von $x + k$ statt x in Erstens bekommt, in einer verticalen Columne untereinander schreibt,

zweitens $f(x + k, y + l) =$

$$\left\{\begin{array}{l}
\qquad\qquad u + \frac{du}{dy}\cdot\frac{l}{1} \qquad + \frac{d^2u}{dy^2}\cdot\frac{l^2}{1.2} \qquad\qquad + \frac{d^3u}{dy^3}\cdot\frac{l^3}{1.2.3} \qquad + \ldots \\
+ \frac{du}{dx}\cdot\frac{k}{1} + \frac{d^2u}{dydx}\cdot\frac{l}{1}\cdot\frac{k}{1} + \frac{d^3u}{dy^2dx}\cdot\frac{l^2}{1.2}\cdot\frac{k}{1} + \frac{d^4u}{dy^3dx}\cdot\frac{l^3}{1.2.3}\cdot\frac{k}{1} + \ldots \\
+ \frac{d^2u}{dx^2}\cdot\frac{k^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dydx^2}\cdot\frac{l}{1}\cdot\frac{k^2}{1.2} + \frac{d^4u}{dy^2dx^2}\cdot\frac{l^2}{1.2}\cdot\frac{k^2}{1.2} + \frac{d^5u}{dy^3dx^2}\cdot\frac{l^3}{1.2.3}\cdot\frac{k^2}{1.2} + \ldots \\
+ \frac{d^3u}{dx^3}\cdot\frac{k^3}{1.2.3} + \frac{d^4u}{dydx^3}\cdot\frac{l}{1}\cdot\frac{k^3}{1.2.3} + \frac{d^5u}{dy^2dx^3}\cdot\frac{l^2}{1.2}\cdot\frac{k^3}{1.2.3} + \frac{d^6u}{dy^3dx^3}\cdot\frac{l^3}{1.2.3}\cdot\frac{k^3}{1.2.3} + \ldots \\
\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots
\end{array}\right\} \quad (♄)$$

Das allgemeine Glied des Ausdrucks (♁) ist $\frac{d^{n+m}u}{dy^n dx^m} \cdot \frac{l^n}{1.2\ldots n} \cdot \frac{k^m}{1.2\ldots m}$.

Nun ist sowohl der Ausdruck (☉), als der Ausdruck (♁) $= f(x+k,\ y+l)$. Also sind beide Ausdrücke gleich.

Läßt man aus beiden Ausdrücken die erste horizontale Reihe, die offenbar in beiden einerlei ist, so wie aus beiden die erste verticale, von welcher dasselbe gilt, weg und dividirt das Uebrige durch $l \cdot k$, so bekommt man

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{d^2u}{dxdy} + \frac{d^3u}{dxdy^2} \cdot \frac{l}{1.2} + \frac{d^4u}{dxdy^3} \cdot \frac{l^2}{1.2.3} + \ldots \\
+ \frac{d^3u}{dx^2dy} \cdot \frac{k}{1.2} + \frac{d^4u}{dx^2dy^2} \cdot \frac{l}{1.2} \cdot \frac{k}{1.2} + \frac{d^5u}{dx^2dy^3} \cdot \frac{l^2}{1.2.3} \cdot \frac{k}{1.2} + \ldots \\
+ \frac{d^4u}{dx^3dy} \cdot \frac{k^2}{1.2.3} + \frac{d^5u}{dx^3dy^2} \cdot \frac{l}{1.2} \cdot \frac{k^2}{1.2.3} + \frac{d^6u}{dx^3dy^3} \cdot \frac{l^2}{1.2.3} \cdot \frac{k^2}{1.2.3} + \ldots \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot
\end{array}\right\} = \quad (♀)$$

$$\left\{\begin{array}{l}
\frac{d^2u}{dydx} + \frac{d^3u}{dy^2dx}\cdot\frac{l}{1.2} + \frac{d^4u}{dy^3dx}\cdot\frac{l^2}{1.2.3} + \ldots \\
+\frac{d^3u}{dydx^2}\cdot\frac{k}{1.2} + \frac{d^4u}{dy^2dx^2}\cdot\frac{l}{1.2}\cdot\frac{k}{1.2} + \frac{d^5u}{dy^3dx^2}\cdot\frac{l^2}{1.2.3}\cdot\frac{k}{1.2} + \ldots \\
+\frac{d^4u}{dydx^3}\cdot\frac{k^2}{1.2.3} + \frac{d^5u}{dy^2dx^3}\cdot\frac{l}{1.2}\cdot\frac{k^2}{1.2.3} + \frac{d^6u}{dy^3dx^3}\cdot\frac{l^2}{1.2.3}\cdot\frac{k^2}{1.2.3} + \ldots \\
\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot
\end{array}\right.$$

Setzt man nun $k = 0$, so ergibt sich

$$\frac{d^2u}{dxdy} + \frac{d^3u}{dxdy^2}\cdot\frac{l}{1.2} + \frac{d^4u}{dxdy^3}\cdot\frac{l^2}{1.2.3} + \ldots =$$

$$\frac{d^2u}{dydx} + \frac{d^3u}{dy^2dx}\cdot\frac{l}{1.2} + \frac{d^4u}{dy^3dx}\cdot\frac{l^2}{1.2.3} + \ldots$$

Hieraus folgt
$$\frac{d^2u}{dxdy} = \frac{d^2u}{dydx}$$
$$\text{oder } \frac{d\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy} = \frac{\left(\frac{du}{dy}\right)}{dx},$$
d. i. die Wahrheit des behaupteten Satzes.

§. 220. Es ist auch $\frac{d^3u}{dxdy^2} = \frac{d^3u}{dy^2dx}$
$$\frac{d^4u}{dxdy^3} = \frac{d^4u}{dy^3dx}$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

§. 121. Läßt man auf beiden Seiten der Gleichung (♀) die erste Reihe weg und dividirt das Uebrigbleibende durch k, so bekommt man
$$\frac{d^3u}{dx^2dy}\cdot\frac{1}{1.2} + \frac{d^4u}{dx^2dy^2}\cdot\frac{l}{1.2}\cdot\frac{1}{1.2} + \frac{d^5u}{dx^2dy^3}\cdot\frac{l^2}{1.2.3}\cdot\frac{1}{1.2} + \ldots =$$
$$\frac{d^3u}{dy\,dx^2}\cdot\frac{1}{1.2} + \frac{d^4u}{dy^2dx^2}\cdot\frac{l}{1.2}\cdot\frac{1}{1.2} + \frac{d^5u}{dy^3dx^2}\cdot\frac{l^2}{1.2.3}\cdot\frac{1}{1.2} + \ldots$$
Hieraus folgt, daß auch ist
$$\frac{d^3u}{dx^2dy} = \frac{{}^3u}{dy\,dx^2}$$
$$\frac{d^4u}{dx^2dy^2} = \frac{d^4u}{dy^2dx^2}$$
$$\frac{d^5u}{dx^2dy^3} = \frac{d^5u}{dy^3dx^2}$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

§. 222. Zu jeder horizontalen Reihe der linken Seite der Gleichung (♀) gehört eine auf der rechten Seite derselben, die ihr gleich ist. Jeder zwei zusammengehörigen Reihen Diffe-

rentialcoefficienten, die einerlei Abmessungen von dx und dy enthalten, sind gleich. Es ist allgemein $\frac{d^{m+n}u}{dx^m dy^n} = \frac{d^{n+m}u}{dy^n dx^m}$.

§. 223. dx und dy als beständig angenommen, ist es einerlei, ob man f(x, y) zuerst mmal so differentiirt, als sey x veränderlich und y beständig, und alsdann das erhaltene Differential nmal so, als sey x beständig und y veränderlich, oder ob man f(x, y) zuerst nmal so differentiirt, als sey y veränderlich und x beständig, und alsdann das gefundene Differential mmal so, als sey x veränderlich und y beständig.

Ex. Für $u = x^m y^n$ findet man

$$\frac{du}{dx} = m x^{m-1} y^n$$

$$\frac{d^2u}{dxdy} = mn x^{m-1} y^{n-1}$$

$$\frac{du}{dy} = n x^m y^{n-1}$$

$$\frac{d^2u}{dydx} = mn x^{m-1} y^{n-1}.$$

§. 224. Die Gleichung (⊙) (§. 219.) wird, wenn man ihre Glieder rechter Hand so untereinander schreibt, daß die Exponenten von l und k eines jeden der untereinander stehenden Glieder, einerlei Summe geben, zu folgender

$$\begin{aligned} f(x+k, y+l) = u &+ \frac{du}{dy}\cdot\frac{l}{1} + \frac{d^2u}{dy^2}\cdot\frac{l^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dy^3}\cdot\frac{l^3}{1.2.3} + \ldots \\ &+ \frac{du}{dx}\cdot\frac{k}{1} + \frac{d^2u}{dxdy}\cdot\frac{l}{1}\cdot\frac{k}{1} + \frac{d^3u}{dxdy^2}\cdot\frac{l^2}{1.2}\cdot\frac{k}{1} + \ldots \\ &+ \frac{d^2u}{dx^2}\cdot\frac{k^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^2dy}\cdot\frac{l}{1}\cdot\frac{k^2}{1.2} + \ldots \\ &+ \frac{d^3u}{dx^3}\cdot\frac{k^3}{1.2.3} + \ldots \end{aligned}$$

Es ist also

$$f(x+k,\ y+l) - f(x,\ y) = \frac{du}{dy}\cdot\frac{l}{1} + \frac{d^2u}{dy^2}\cdot\frac{l^2}{1.2} + \ldots$$
$$+ \frac{du}{dx}\cdot\frac{k}{1} + \frac{d^2u}{dxdy}\cdot\frac{l}{1}\cdot\frac{k}{1} + \ldots$$
$$+ \frac{d^2u}{dx^2}\cdot\frac{k^2}{1.2} + \ldots$$

Was auf der rechten Seite dieser Gleichung steht, ist der Unterschied zwischen dem ursprünglichen Zustande der Funktion $f(x,\ y) = u$, und dem Zustande, in welchen sie tritt, wenn man $x + k$ statt x und $y + l$ statt y in dieselbe setzt. Der Theil $\frac{du}{dy}\cdot\frac{l}{1} + \frac{du}{dx}\cdot\frac{k}{1}$ dieses Unterschieds besteht aus zwei Stücken, von denen das erste bloß die Veränderung l und das zweite bloß die Veränderung k, von der ersten Abmessung, als Faktor enthält. Die Stücke der übrigen Theile des Unterschieds, z. B. des Theils $\frac{d^2u}{dy^2}\cdot\frac{l^2}{1.2} + \frac{d^2u}{dxdy}\cdot\frac{l}{1}\cdot\frac{k}{1} + \frac{d^2u}{dx^2}\cdot\frac{k^2}{1.2}$, enthalten l und k von höhern Abmessungen, denn der ersten, als Faktor. Das Produkt $l\,.\,k$ muß bekanntlich als von der zweiten Abmessung seyend betrachtet werden.

§. 225. Dem Vorhergehenden zufolge bedeutet in dem Theile $\frac{du}{dy}\cdot\frac{l}{1} + \frac{du}{dx}\cdot\frac{k}{1}$ das $\frac{du}{dy}$ den Differentialcoefficienten, den man erhält, wenn man $u = f(x,\ y)$ so, als sey bloß y veränderlich, differentiirt, und das unter dieser Voraussetzung gefundene Differential durch dy dividirt. Eben so bedeutet $\frac{du}{dx}$, daß man $u = f(x, y)$ so, als sey bloß x veränderlich, differentiirt und das unter dieser Voraussetzung gefundene Differential durch dx dividirt hat. Auch ist bekannt, daß die Ausdrücke $\frac{du}{dy}$, $\frac{du}{dx}$ Funktionen von x und y sind.

§. 226. Daß man $u = f(x,\ y)$ so differentiirt habe, als sey nur y veränderlich, deute man durch $\frac{du}{dy}\,dy$ an. Hier-

nach wird also der Ausdruck $\frac{du}{dx}dx$ bedeuten, daß man u so differentiirt habe, als sey bloß x veränderlich. Der Ausdruck $\frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dx}dx$ endlich bedeutet, daß man $u = f(x, y)$ zuerst so differentiirt hat, als sey bloß y und alsdann so, als sey bloß x veränderlich, und daß man hierauf die unter diesen Voraussetzungen gefundenen Differentiale addirt hat. Den Ausdruck $\frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dx}dx$ erhält man, wenn man in $\frac{du}{dy} \cdot \frac{l}{1} + \frac{du}{dx} \cdot \frac{k}{1}$ statt l, welches die Veränderung von y ist, dy, und statt k, d. i. statt der Veränderung des x, dx setzt.

Der Ausdruck $\frac{d^2u}{dy^2}dy^2$ bedeutet, daß man $\frac{du}{dy}dy$, wo, wie schon gesagt, $\frac{du}{dy}$ eine Funktion von x und y ist, so differentiirt habe, als sey nur y veränderlich. Eben so bedeutet der Ausdruck $\frac{d^2u}{dxdy}dx\,dy$, daß man $\frac{du}{dy}dy$ so differentiirt habe, als sey nur x, oder $\frac{du}{dx}dx$ so, als sey nur y veränderlich, u. s. w. dx und dy sind als unveränderlich angenommen.

§. 227. Erkl. Der Ausdruck $\frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dx}dx$ (§. 226.) heißt übereinstimmend mit §. 143. das erste Differential von $f(x, y) = u$.

§. 228. Man findet also das Differential einer Funktion von zwei veränderlichen Größen auf folgende Art: Man differentiirt die Funktion zuerst so, als sey bloß die eine veränderliche Größe veränderlich, und alsdann so, als sey bloß die andere veränderliche Größe veränderlich, und addirt hierauf die so erhaltenen Differentiale.

Differentiirt man das erste Differential, wie man, um dasselbe zu erhalten, die ursprüngliche Funktion differentiirt hat, so bekommt man das zweite Differential dieser Funktion.

Das zweite Differential von $f(x, y) = u$ ist

$$\frac{d^2u}{dy^2}dy^2 + 2 \cdot \frac{d^2u}{dxdy}dx\,dy + \frac{d^2u}{dx^2}dx^2.$$

Es ist leicht einzusehen, wie man die höhern Differentiale findet.

Exempel. Man soll differentiiren

1) $x + y$.

Es ist $d(x + y) = dx + dy$.

2) xy.

Man hat hier $d(xy) = ydx + xdy$.

3) $\frac{x}{y}$.

Es ist $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$.

4) $x^m y^n$.

Es ist $d(x^m y^n) = y^n \cdot mx^{m-1}dx + x^m \cdot ny^{n-1}dy$
$= x^{m-1} \cdot y^{n-1} \cdot (mydx + nxdy)$.

5) $\frac{ax^2}{\sqrt{(a^2 - y^2)}} = u$.

Hier ist $\frac{du}{dx}dx = \frac{2axdx}{\sqrt{(a^2-y^2)}}$

und $\frac{du}{dy}dy = \frac{ax^2ydy}{(a^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Folglich $du = \frac{2axdx}{\sqrt{(a^2 - y^2)}} + \frac{ax^2ydy}{(a^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

6) arc $\mathfrak{Tg}\,\frac{x}{y}$.

Es sey $\frac{x}{y} = z$, also arc $\mathfrak{Tg}\,\frac{x}{y} =$ arc $\mathfrak{Tg}\,z$.

Nun ist d arc $\mathfrak{Tg}\,z = \frac{dz}{1 + z^2}$

und $dz = \frac{ydx - xdy}{y^2}$.

Folglich ist

$$d \operatorname{arc} \mathfrak{Tg} \frac{x}{y} = \frac{\frac{ydx - xdy}{y^2}}{1 + \frac{x^2}{y^2}} = \frac{ydx - xdy}{y^2 + x^2}.$$

7) $d(y^x)$.

Man setze $y^x = z$, so ist

$$x . \lg y = \lg z$$

$$\text{und } x . d \lg y + \lg y . dx = d \lg z$$

$$x . \frac{dy}{y} + \lg y . dx = \frac{dz}{z}$$

$$x . z . \frac{dy}{y} + z . \lg y . dx = dz$$

$$x . y^x . \frac{dy}{y} + z . \lg y . dx = dz$$

$$x . y^{x-1} . dy + y^x . \lg y . dx = dz.$$

§. 229. Für die Differentiation einer Funktion $u = f(x, y)$ von zwei veränderlichen Größen, und die Differentiation einer Gleichung $Ax^k y^l + Bx^m y^n + Cx^p y^q + \ldots = 0$ zwischen zwei veränderlichen Größen gilt also einerlei Vorschrift. Siehe §. 215.

§. 230. Wenn man in der Gleichung

$$f(x + k, y + l) - f(x, y) = \frac{du}{dy} . \frac{l}{1} + \frac{d^2u}{dy^2} . \frac{l^2}{1.2} + \ldots$$
$$+ \frac{du}{dx} . \frac{k}{1} + \frac{d^2u}{dxdy} . \frac{l}{1} . \frac{k}{1} + \ldots$$
$$+ \frac{d^2u}{dx^2} . \frac{k^2}{1.2} + \ldots$$

das $l = m . k$ setzt, wo m eine beliebige veränderliche Größe bedeutet, so erhält man

$$f(x + k, y + m . k) - f(x, y) = \frac{du}{dy} . mk + \frac{d^2u}{1.2.dy^2} . m^2k^2 + \ldots$$
$$+ \frac{du}{dx} . k + \frac{d^2u}{dx\,dy} . mk^2 + \ldots$$
$$+ \frac{d^2u}{1.2.dx^2} . k^2 + \ldots$$

Nimmt also k immerfort ab, so nähert sich der Unterschied $f(x+k,\ y+m\,.\,k) - f(x,\ y)$ immermehr der Größe $\frac{du}{dy}\,.\,mk + \frac{du}{dx}\,.\,k$ als seiner Grenze. Man setze l statt mk. Dadurch wird jener Unterschied zu $f(x+k,\ y+l) - f(x,y)$, und seine Grenze zu $\frac{du}{dy}\,.\,l + \frac{du}{dx}\,.\,k$. Statt der Größen l und k, die als immerfort abnehmend gedacht werden, setze man die Größen dy und dx, die denn auch als immerfort abnehmend gedacht werden müssen. Hierdurch verwandelt sich $\frac{du}{dy}\,.\,l + \frac{du}{dx}\,.\,k$ in $\frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dx}dx$. Also ist, wenn dy und dx als immer abnehmend angenommen werden, das Differential $df(x,\ y) = \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dx}dx$ als die Grenze anzusehen, der sich der Unterschied $f(x+k,\ y+l) - f(x,\ y)$ immerfort nähert.

§. 231. Differentiirt man den Ausdruck

$$\frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dx}dx \quad (A.)$$

zuerst so, als sey nur y, und alsdann so, als sey nur x veränderlich, und addirt darauf die erhaltenen Differentiale, d. i. sucht man das zweite Differential von $f(x,\ y)$, so bekommt man

$$\frac{d^2u}{dy^2}dy^2 + \frac{d^2u}{dx\,dy}dx\,dy + \frac{d^2u}{dy\,dx}dy\,dx + \frac{d^2u}{dx^2}dx^2$$

oder $$\frac{d^2u}{dy^2}\,.\,d^2 + 2\,.\,\frac{d^2u}{dx\,dy}dx\,dy + \frac{d^2u}{dx^2}dx^2 \quad (B.).$$

Durch Behandlung des Ausdrucks (B.) auf eben die Art, wie man den Ausdruck (A.) behandelt hat, erhält man

$$\frac{d^3u}{dy^3}dy^3 + 2\,.\,\frac{d^3u}{dxdy^2}dxdy^2 + \frac{d^3u}{dx^2dy}dx^2dy$$
$$+ \frac{d^3u}{dxdy^2}dx\,dy^2 + 2\,.\,\frac{d^3u}{dx^2dy}dx^2\,dy + \frac{d^3u}{dx^3}dx^3$$

oder

$$\frac{d^3u}{dy^3}dy^3 + 3\,.\,\frac{d^3u}{dxdy^2}dx\,dy^2 + 3\,.\,\frac{d^3u}{dx^2dy}dx^2dy + \frac{d^3u}{dx^3}dx^3 \quad (C.)$$

Dies ist das dritte Differential von $f(x, y)$.

Die Ausdrücke (B.) und (C.) zeigen eine, sogleich in die Augen fallende Aehnlichkeit mit der Entwicklung der zweiten und dritten Potenz eines Binomiums. Man nehme an, das Gesetz, welches die Ausdrücke (B.) und (C.) vor Augen legen, sey allgemein und man erhalte für das nte Differential

$$\frac{d^n u}{dy^n}dy^n + \frac{n}{1}\cdot\frac{d^n u}{dx dy^{n-1}}dx dy^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{d^n u}{dx^2 dy^{n-2}}dx^2 dy^{n-2} + \ldots \quad (D.)$$

Differentiirt man nun diesen Ausdruck zuerst, als sey bloß y, und alsdann, als sey bloß x veränderlich, und addirt darauf das Gefundene, so erhält man

$$\frac{d^{n+1}u}{dy^{n+1}}dy^{n+1} + \frac{n}{1}\cdot\frac{d^{n+1}u}{dx dy^n}dx\, dy^n + \frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{d^{n+1}u}{dx^2 dy^{n-1}}dx^2 dy^{n-1} + \ldots$$
$$+ 1.\frac{d^{n+1}}{dx dy^n}dx\, dy^n + \frac{n}{1}\cdot\frac{d^{n+1}u}{dx^2 dy^{n-1}}dx^2 dy^{n-1} + \ldots$$

oder

$$\frac{d^{n+1}u}{dy^{n+1}}dy^{n+1} + (n+1)\frac{d^{n+1}u}{dx dy^n}dx\, dy^n + \frac{(n+1)n}{1.2}\cdot\frac{d^{n+1}u}{dx^2 dy^{n-1}}dx^2 dy^{n-1} + \ldots$$

Gilt also das angenommene Gesetz für das nte Differential, so gilt es auch für das $n+1$te. Nun gilt es für das dritte, also auch für das vierte, folglich auch für das fünfte, ꝛc.

§. 232a. Es ist auch $f(x+k, y+l) - f(x, y) =$

$$\left.\begin{matrix}\frac{du}{dy}.l \\ +\frac{du}{dx}.k\end{matrix}\right| + \frac{1}{1.2}\left|\begin{matrix}\frac{d^2u}{dy^2}.l^2 \\ \frac{2.d^2u}{dx\,dy}lk \\ \frac{d^2u}{dx^2}.k^2\end{matrix}\right| + \frac{1}{1.2.3}\left|\begin{matrix}\frac{d^3u}{dy^3}.l^3 \\ \frac{3.d^3u}{dx\,dy^2}.l^2k \\ \frac{3.d^3u}{dx^2dy}.lk^2 \\ \frac{d^3u}{dx^3}k^3\end{matrix}\right. + \ldots \quad (A.)$$

Die Aehnlichkeit des Gesetzes, nach welchem die in einerlei verticalen Columne stehenden Glieder hier gebildet sind, mit dem Gesetze, nach welchem die Glieder der Potenz eines

entwickelten Binomiums fortschreiten, springt in die Augen. Daß alle andern in einerlei verticalen Columne stehenden Glieder nach demselben Gesetze gebildet werden, läßt sich auf folgende Art zeigen.

Aus der Betrachtung der Art des Fortganges der Reihen (§. 219.) und des allgemeinen Gliedes $\frac{d^{m+n}u}{dx^m dy^n} \cdot \frac{l^n}{1.2\ldots n} \cdot \frac{k^m}{1.2\ldots m}$ daselbst ergibt sich, daß, bei dem Untereinanderschreiben der Glieder nach Vorschrift §. 224., überhaupt folgende Glieder untereinander zu stehen kommen:

$$\frac{d^n u}{dy^n} \cdot \frac{l^n}{1.2..n}$$
$$+ \frac{d^n u}{dx dy^{n-1}} \cdot \frac{l^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} \cdot \frac{k}{1}$$
$$+ \frac{d^n u}{dx^2 dy^{n-2}} \cdot \frac{l^{n-2}}{1.2\ldots(n-2)} \cdot \frac{k^2}{1.2}$$
$$+ \frac{d^n u}{dx^3 dy^{n-3}} \cdot \frac{l^{n-3}}{1.2\ldots(n-3)} \cdot \frac{k^3}{1.2.3}$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$+ \frac{d^n u}{dx^{m-2} \cdot dy^2} \cdot \frac{l^2}{1.2} \cdot \frac{k^{m-2}}{1.2\ldots(m-2)}$$
$$+ \frac{d^n u}{dx^{m-1} dy} \cdot \frac{l}{1} \cdot \frac{k^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)}$$
$$+ \frac{d^n u}{dx^m} \cdot \frac{k^m}{1.2\ldots m} \cdot$$

Man kann diese Glieder auch so schreiben:

$$\frac{d^n u}{dy^n} \cdot \frac{l^n}{1.2\ldots n}$$
$$+ \frac{d^n u}{dx dy^{n-1}} \cdot \frac{n . l^{n-1}}{1.2\ldots n} \cdot \frac{k}{1}$$
$$+ \frac{d^n u}{dx^2 dy^{n-2}} \cdot \frac{n.(n-1).l^{n-2}}{1.2\ldots n} \cdot \frac{k^2}{1.2}$$

$$+\frac{d^nu}{dx^3dy^{n-3}} \cdot \frac{n(n-1)(n-2) \cdot l^{n-3}}{1.2.....n} \cdot \frac{k^3}{1.2.3}$$

$$\vdots$$

$$+\frac{d^nu}{dx^{m-2}dy^2} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)...4.3.l^2}{1.2.....n} \cdot \frac{k^{m-2}}{1.2...(m-2)}$$

$$+\frac{d^nu}{dx^{m-1}dy} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)...3.2.l}{1.2....n} \cdot \frac{k^{m-1}}{1.2...(m-1)}$$

$$+\frac{d^nu}{dx^m} \cdot \frac{1.2...n.k^m}{(1.2...n)1.2...m}.$$

Hieraus ergibt sich

$$\frac{1}{1.2...n}\left|\begin{array}{l} \frac{d^nu}{dy^n} \cdot l^n \\ \frac{n}{1} \cdot \frac{d^nu}{dxdy^{n-1}} \cdot l^{n-1} \cdot k \\ \frac{n(n-1)}{1.2} \cdot \frac{d^nu}{dx^2dy^{n-2}} \cdot l^{n-2} \cdot k^2 \\ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \cdot \frac{d^nu}{dx^3dy^{n-3}} \cdot l^{n-3} \cdot k^3 \\ \vdots \\ \frac{n(n-1)...4.3}{1.2...(m-2)} \cdot \frac{d^nu}{dx^{m-2}dy^2} \cdot l^2 \cdot k^{m-2} \\ \frac{n(n-1)...3.2}{1.2....(m-1)} \cdot \frac{d^nu}{dx^{m-1}dy} \cdot l \cdot k^{m-1} \\ \frac{n(n-1)...2.1}{1.2....m} \cdot \frac{d^nu}{dx^m} \cdot k^m. \end{array}\right.$$

§. 232b. Die Differentialcoefficienten, welche auf der rechten Seite der Gleichung (A.) in die verschiedenen Dimensionen von l und k multiplicirt sind, lassen sich leicht auf folgende Art finden:

1) Man sucht das erste Differential von $u = f(x, y)$. Es ist nach §. 228.

$$\frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dx}dx.$$

Man dividirt die Glieder dieses Ausdrucks, jedes, durch das Differential von x und y, welches es als Faktor enthält. Dadurch bekommt man die zu l und k von der ersten Abmessung gehörenden Differentialcoefficienten

$$\frac{du}{dy}, \frac{du}{dx}.$$

2) Man sucht das zweite Differential von $u = f(x, y)$. Es ist

$$\frac{d^2u}{dy^2}dy^2 + 2 \cdot \frac{d^2u}{dx\,dy}dx\,dy + \frac{d^2u}{dx^2}dx^2.$$

Die Glieder in diesem Ausdruck dividirt man, jedes, durch die Abmessung von dx und dy, die es als Faktor enthält. Hierdurch bekommt man die zu der zweiten Abmessung von l und k gehörenden Differentialcoefficienten

$$\frac{d^2u}{dy^2}, 2 \cdot \frac{d^2u}{dx\,dy}, \frac{d^2u}{dx^2}.$$

3) Man sucht das dritte Differential von $u = f(x, y)$. Es ist

$$\frac{d^3u}{dy^3}dy^3 + 3 \cdot \frac{d^3u}{dx\,dy^2}dx\,dy^2 + 3 \cdot \frac{d^3u}{dx^2dy}dx^2dy + \frac{d^3u}{dx^3}dx^3.$$

Hieraus leitet man durch das Verfahren in 1) und 2) her

$$\frac{d^3u}{dy^3}, 3 \cdot \frac{d^3u}{dx\,dy^2}, 3 \cdot \frac{d^3u}{dx^2dy}, \frac{d^3u}{dx^3}.$$

u. s. w.

Ex. Für $u = x^m y^n$ ist

1) $\frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dx}dx = n \cdot x^m y^{n-1}dy + m \cdot x^{m-1}y^n dx.$

Also $\frac{du}{dy} = n \cdot x^m y^{n-1}$, $\frac{du}{dx} = mx^{m-1}y^n.$

2) $\frac{d^2u}{dy^2}dy^2 + 2 \cdot \frac{d^2u}{dx\,dy}dx\,dy + \frac{d^2u}{dx^2}dx^2 =$

$$n(n-1)x^m y^{n-2}dy^2 + 2.mnx^{m-1}y^{n-1}dxdy + m(m-1)x^{m-2}y^n dx^2.$$

Also $\frac{d^2u}{dy^2} = n(n-1)x^m y^{n-2}$, $2 \cdot \frac{d^2u}{dx\,dy} = 2.mnx^{m-1}y^{n-1}$,

$$\frac{d^2u}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}y^n.$$

3) $\frac{d^3u}{dy^3}dy^3 + 3 \cdot \frac{d^3u}{dx\,dy^2} \cdot dx\,dy^2 + 3 \cdot \frac{d^3u}{dx^2dy}dx^2dy + \frac{d^3u}{dx^3}dx^3$

$= n(n-1)(n-2)x^m y^{n-3}dy^3 + 3mn(n-1)x^{m-1}y^{n-2}dx\,dy^2$
$+ 3.mn(m-1)x^{m-2}y^{n-1}dx^2dy + m(m-1)(m-2)x^{m-3}y^n dx^3.$

Also $\frac{d^3u}{dy^3} = n(n-1)(n-2)x^m y^{n-3}$, $3 \cdot \frac{d^3u}{dxdy^2} = 3mn(n-1)x^{m-1}y^{n-2}$,

$3 \cdot \frac{d^3u}{dx^2dy} = 3.mn(m-1)x^{m-2}y^{n-1}$, $\frac{d^3u}{dx^3} = m(m-1)(m-2)x^{m-3}y^n.$

Folglich ist $(x+k)^m \cdot (y+l)^n =$

$= x^m y^n$

$+ n \cdot x^m y^{n-1} \cdot l + m \cdot x^{m-1}y^n \cdot k$

$+ \frac{1}{1.2} \cdot [n(n-1)x^m y^{n-2}.l^2 + 2.mnx^{m-1}y^{n-1}.l.k + m(m-1)x^{m-2}y^n.k^2]$

$+ \frac{1}{1.2.3} \cdot [n(n-1)(n-2)x^m y^{n-3}.l^3 + 3mn(n-1)x^{m-1}y^{n-2}l^2.k$
$+ 3mn(m-1)x^{m-2}y^{n-1}.lk^2 + m(m-1)(m-2)x^{m-3}y^n.k^3]$

. . . .

§. 233. Setzt man in der Gleichung (§. 224.) dx statt k und dy statt l, was geschehen darf, da man für die unbestimmten Veränderungen k und l setzen kann, was man will, so erhält man

$$f(x+dx, y+dy) = u + \frac{du}{dy}dy + \frac{d^2u}{dy^2} \cdot \frac{dy^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dy^3} \cdot \frac{dy^3}{1.2.3} + \ldots$$
$$+ \frac{du}{dx}dx + \frac{d^2u}{dxdy} \cdot \frac{dy}{1} \cdot \frac{dx}{1} + \frac{d^3u}{dxdy^2} \cdot \frac{dy^2}{1.2} \cdot \frac{dx}{1} + \ldots$$
$$+ \frac{d^2u}{dx^2} \cdot \frac{dx^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^2dy} \cdot \frac{dy}{1} \cdot \frac{dx^2}{1.2} + \ldots$$
$$+ \frac{d^3u}{dx^3} \cdot \frac{dx^3}{1.2.3} + \ldots$$

Nun ist von $f(x, y) = u$,

$$du = \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dx} dx$$

$$d^2u = \frac{d^2u}{dy^2} dy^2 + 2 . \frac{d^2u}{dxdy} dx\,dy + \frac{d^2u}{dx^2} dx^2$$

$$d^3u = \frac{d^3u}{dy^3} dy^3 + 3 . \frac{d^3u}{dxdy^2} dxdy^2 + 3 . \frac{d^3u}{dx^2dy} dx^2dy + \frac{d^3u}{dx^3} dx^3$$

. . . .

Also ist auch

$$f(x+dx, y+dy) = u + \frac{du}{1} + \frac{d^2u}{1.2} + \frac{d^3u}{1.2.3} + \ldots$$

$$= f(x, y) + \frac{df(x, y)}{1} + \frac{d^2f(x, y)}{1.2} + \frac{d^3f(x, y)}{1.2.3} + \ldots$$

(§. 164.)

§. 234. In der Gleichung

$$f(x+k, y+l) = u + \frac{du}{dy} . l + \frac{du}{dx} . k + \frac{1}{1.2} \left| \begin{matrix} \frac{d^2u}{dy^2} . l^2 \\ \frac{2 . d^2u}{dx\,dy} . l . k \\ \frac{d^2u}{dx^2} . k^2 \end{matrix} \right. + \frac{1}{1.2.3} \left| \begin{matrix} \frac{d^3u}{dy^3} . l^3 \\ \frac{3 . d^3u}{dx . dy^2} . l^2k \\ \frac{3 . d^3u}{dx^2dy} . l . k^2 \\ \frac{d^3u}{dx^3} . k^3 \end{matrix} \right. + \ldots$$

setze man $x = 0$ und $y = 0$. Bezeichnet man für diese Setzung

$$u \text{ durch } (u)$$

$$\frac{du}{dy} \quad \left(\frac{du}{dy}\right)$$

$$\frac{du}{dx} \quad \left(\frac{du}{dx}\right)$$

$$\frac{d^2u}{dy^2} \quad \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)$$

u. s. w.,

so erhält man

$$
f(k,l) = (u) + \left(\frac{du}{dy}\right).l \; + \left(\frac{du}{dx}\right).k + \frac{1}{1.2}\left|\begin{array}{l} \left(\frac{d\,u}{dy^2}\right).l^2 \\ \left(\frac{2.d^2u}{dx\,dy}\right)l.k \\ \left(\frac{d^3u}{dx^2}\right)k^2 \end{array}\right. + \frac{1}{1.2.3}\left|\begin{array}{l} \left(\frac{d^3u}{dy^3}\right)l^3 \\ \left(\frac{3.d^3u}{dxdy^2}\right)l^2k \\ \left(\frac{3.d^3u}{dx^2y}\right)lk^2 \\ \left(\frac{d^3u}{dx^3}\right).k^3 \end{array}\right. + \ldots
$$

Hieraus bekommt man, wenn man x statt k und y statt l setzt,

$$
f(x,y) = (u) + \left(\frac{du}{dy}\right)y \; + \left(\frac{du}{dx}\right)x + \frac{1}{1.2}\left|\begin{array}{l} \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)y^2 \\ \left(\frac{2.d^2u}{dx\,dy}\right).y.x \\ \left(\frac{d^3u}{dx^2}\right)x^2 \end{array}\right. + \frac{1}{1.2.3}\left|\begin{array}{l} \left(\frac{d^3u}{dy^3}\right)y^3 \\ \left(\frac{3.d^3u}{dxdy^2}\right)y^2x \\ \left(\frac{3.d^3u}{dx^2dy}\right)yx^2 \\ \left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)x^3 \end{array}\right. + \ldots
$$

Das hier Gefundene dient, eine Funktion von zwei veränderlichen Größen in eine Reihe zu verwandeln. Man vergleiche §. 177.

§. 235. Man kann das aus einer Funktion u von zwei veränderlichen Größen x und y entsprungene Differential

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy$$

auch kürzer

$$du = P\,dx + Q\,dy$$

schreiben, wo also $P = \frac{du}{dx}$, und $Q = \frac{du}{dy}$, d. i., P der Differentialcoefficient ist, den man erhält, wenn man $u = f(x,\ y)$ so differentiirt, als sey nur x veränderlich, und Q der Differentialcoefficient, den man bekommt, wenn man $u = f(x,\ y)$ so differentiirt, als sey nur y veränderlich. Gebraucht man diese Bezeichnungsart, so hat man nach dem Satze (§. 219.)

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}.$$

§. 236. Ein Differential $Pdx + Qdy = 0$ (§. 217.), welches man durch Differentiation einer Gleichung zwischen zwei veränderlichen Größen hergeleitet hat, kann, wenn P und Q einen gemeinschaftlichen Faktor haben, durch denselben dividirt werden; auch kann solcher gemeinschaftliche Faktor durch Verbindung des Differentials mit der ursprünglichen Funktion wegfallen. In jenem, wie in diesem Fall, erhält man ein Differential, in welchem die in dx und dy multiplicirten Coefficienten verschieden sind von den in eben diese Größen dx und dy multiplicirten Coefficienten des Differentials, das man aus der ursprünglichen Funktion durch bloße Differentiation hergeleitet hat.

Ex. 1. Das Differential von $\frac{1}{2}x^2y^4 = a$ ist $xy^4dx + 2x^2y^3dy = 0$. Dividirt man durch x, so erhält man $y^4dx + 2x^2y^3dy = 0$.

Ex. 2. Es seyen M und N Funktionen von x und y, und $M + cN = 0$, so ist $dM + cdN = 0$, oder, da $c = -\frac{M}{N}$, $dM - \frac{M}{N} \cdot dN = 0$, oder $NdM - MdN = 0$. Man differentiire nun auch $\frac{M}{N} = -c$. Man bekommt hierdurch $\frac{NdM - MdN}{N^2} = 0$.

§. 237. Durch solche Veränderungen, welche die in dx und dy multiplicirten Coefficienten erleiden, wird aber keineswegs das Differentialverhältniß $\frac{dy}{dx}$ verändert.

§. 238. Ist ein Differential $P\,dx + Q\,dy = 0$ aus einer Gleichung zwischen zwei veränderlichen Größen durch bloße Differentiation hergeleitet worden, so muß auch für dasselbe

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$$

seyn, da man bei seiner Herleitung aus der zwischen den zwei veränderlichen Größen gegebenen Gleichung das nämliche Gesetz befolgt hat, nach welchem man $du = P\,dx + Q\,dy$ aus

$u = f(x, y)$ findet. Ist aber $P\,dx + Q\,dy = 0$ ein Differential, das nicht durch bloße Differentiation aus einer zwischen zwei veränderlichen Größen gegebenen Gleichung hergeleitet worden ist, so kann es sich treffen, daß nicht

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$$

ist.

§. 239. Wenn für die Differentialgleichungen

$$du = P\,dx + Q\,dy$$

$$\text{und } 0 = P\,dx + Q\,dy$$

$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$ ist, so heißen sie vollständig. Ist nicht $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$, so heißen sie unvollständig, oder sie sind gar unrichtig.

Ex. 1. Es sey $du = \frac{2x}{y^3} . dx - \frac{3x^2}{y^4} . dy$.

Hier ist $P = \frac{2x}{y^3}$, und $Q = -\frac{3x^2}{y^4}$.

Differentiirt man nun P, als sey bloß y, und Q, als sey bloß x veränderlich, so erhält man

$$dP = -\frac{6x}{y^4} . dy$$

$$\text{und } dQ = -\frac{6x}{y^4} . dx.$$

$$\text{Also ist } \frac{dP}{dy} = -\frac{6x}{y^4}$$

$$\text{und } \frac{dQ}{dx} = -\frac{6x}{y^4}.$$

Die gegebene Differentialgleichung ist also vollständig.

Ex. 2. Es sey $\frac{x}{y} = a$.

Man differentiire, so erhält man

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} = 0.$$

Hieraus bekommt man, wenn man auf beiden Seiten mit y^2 multiplicirt,

$$y\,dx - x\,dy = 0.$$

Setzt man nun $P = y$, und $Q = -x$, so findet man

$$\frac{dP}{dy} = +1, \quad \frac{dQ}{dx} = -1.$$

Also ist die Gleichung $y\,dx - x\,dy = 0$ kein vollständiges Differential.

Aus der Gleichung $\frac{dx}{y} - \frac{x\,dy}{y^2} = 0$ findet man, wenn $P = \frac{1}{y}$, und $Q = -\frac{x}{y^2}$ gesetzt wird,

$$\frac{dP}{dy} = -y^{-2}, \text{ und } \frac{dQ}{dx} = -y^{-2}.$$

§. 240. Nach dem Bisherigen kann man auch Funktionen von mehr, als zwei veränderlichen Größen differentiiren.

Exempel. Man soll differentiiren:

1) $x + y + z$.

Man setze $x + y = v$, so ist

$$\begin{aligned} d(x + y + z) &= d(v + z) \\ &= dv + dz \\ &= d(x + y) + dz \\ &= dx + dy + dz. \end{aligned}$$

2) xyz.

Setzt man $xy = v$, so ist

$$\begin{aligned} xyz &= vz \\ d(xyz) &= z\,dv + v\,dz \\ &= z\,d(xy) + xy\,dz \\ &= zy\,dx + zx\,dy + xy\,dz. \end{aligned}$$

3) $v^p x^q y^r$.

Man setze $x^q y^r = z$,

also $v^p x^q y^r = v^p z$,

so ist $d(v^p x^q y^r) = z \,.\, p v^{p-1} dv + v^p dz$

$$= z \,.\, pv^{p-1}dv + v^p \,.\, d\,(x^q y^r)$$
$$= px^q y^r v^{p-1}dv + v^p \,.\, qx^{q-1}y^r dx + v^p x^q \,.\, ry^{r-1}dy$$
$$= px^q y^r v^{p-1}dv + qv^p y^r x^{q-1}dx + rv^p x^q y^{r-1}dy.$$

Sechstes Kapitel.

Anwendung der Differentialrechnung auf die Lehre vom Größten und Kleinsten.

§. 241. Wenn y eine Funktion von x ist und für einen gewissen Werth des x der zu demselben gehörige Werth des y größer oder kleiner wird, als die zunächst vorhergehenden und nachfolgenden Werthe des y, die zu $x - k$ und $x + k$ gehören, so heißt der größere Werth des y ein **Größtes** (Maximum), und der kleinere ein **Kleinstes** (Minimum), wenn jener gleich nicht größer, und dieser nicht kleiner ist, als jeder vorhergehende oder jeder nachfolgende Werth für y.

Durch Zeichen läßt sich die Sache so darstellen. Es sey $y = f(x)$. Man setze statt x nach einander a, $a - k$, $a + k$. Ist nun sowohl $f(a - k)$, als auch $f(a + k)$ kleiner, als $f(a)$, so ist $f(a)$ ein Größtes; ist aber $f(a - k)$ sowohl, als $f(a + k)$ größer, als $f(a)$, so ist $f(a)$ ein Kleinstes.

Ex. 1. Es sey $y = b - (a - x)^2$. Man setze x zuerst $= a$, dann $= a - k$, und endlich $= a + k$. Im ersten Fall erhält man $y = b$, im zweiten $y = b - k^2$, im dritten $y = b - k^2$. Für $x = a$ wird also y ein Größtes.

Ex. 2. Es sey $y = b + (a - x)^2$. Setzt man x nach einander $= a$, $a - k$, $a + k$, so werden die diesen verschiedenen Werthen des x entsprechenden Werthe des $y = b$, $b + k^2$, $b + k^2$. Also ist für $x = a$ das y ein Kleinstes.

§. 242. Es gibt Funktionen, welche keinen größten oder kleinsten Werth erhalten, man mag x annehmen wie man will. Von dieser Art ist z. B. die Funktion $x^3 + x$, welche mit den

wachsenden Werthen für x beständig wächst, und mit den abnehmenden beständig abnimmt.

§. 243. I. In $y = f(x)$ setze man das einemal $x + k$, und das andere mal $x - k$ statt x. Man erhält nach dem Taylorschen Satze

durch die erste Setzung

$$y' = y + \frac{dy}{dx}.k + \frac{d^2y}{dx^2}.\frac{k^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}.\frac{k^3}{1.2.3} + \frac{d^4y}{dx^4}.\frac{k^4}{1.2.3.4} + \ldots$$

und durch die zweite

$$y'' = y - \frac{dy}{dx}.k + \frac{d^2y}{dx^2}.\frac{k^2}{1.2} - \frac{d^3y}{dx^3}.\frac{k^3}{1.2.3} + \frac{d^4y}{dx^4}.\frac{k^4}{1.2.3.4} - \ldots$$

II. Man nehme für k einen Werth an, der klein genug ist, um die Summe aller Glieder nach dem zweiten in den Reihen für y', y'' kleiner zu machen, als das zweite Glied in jeder der genannten Reihen (§. 29. 30.). Nach dieser Voraussetzung mag also die Summe der nach dem zweiten Gliede folgenden Glieder positiv oder negativ werden, so ändert das die Eigenschaft des Positiven oder des Negativen des zweiten Gliedes nicht. Ist nun $\frac{dy}{dx}$ eine bejahte Größe, so erhält man für y' einen Werth, der größer, und für y'' einen, der kleiner ist, als y; und ist $\frac{dy}{dx}$ eine verneinte Größe, so ist der Werth für y' kleiner und für y'' größer, als y. Folglich kann, wenn $\frac{dy}{dx}$ eine bejahte oder eine verneinte Größe ist, y weder ein Größtes noch ein Kleinstes seyn.

III. Man setze $\frac{dy}{dx} = 0$, und suche den aus dieser Voraussetzung sich ergebenden Werth des x. Er heiße f. Man setze, er sey möglich.

IV. Da $\frac{dy}{dx} = 0$ ist, so hat man nun

$$y' = y + \frac{d^2y}{dx^2}.\frac{k^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}.\frac{k^3}{1.2.3} + \frac{d^4y}{dx^4}.\frac{k^4}{1.2.3.4} + \ldots$$

und $$y'' = y + \frac{d^2y}{dx^2}.\frac{k^2}{1.2} - \frac{d^3y}{dx^3}.\frac{k^3}{1.2.3} + \frac{d^4y}{dx^4}.\frac{k^4}{1.2.3.4} - \ldots$$

Hier läßt sich k wieder so annehmen, daß die Summe aller Glieder, welche auf das Glied $\frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{k^2}{1.2}$ folgen, kleiner ist, als dieses Glied, das in den Reihen für y' und y'' immer einerlei ist, man mag $x + k$ oder $x - k$ für x in $f(x)$ setzen. Man substituire den in III. für x gefundenen Werth in den Ausdruck für $\frac{d^2y}{dx^2}$. Hierdurch erhalte man einen negativen Werth für $\frac{d^2y}{dx^2}$. In diesem Fall ist also sowohl y' als y'' kleiner, als y. Folglich der Werth des y für $x = f$ ein Größtes. Findet man bei der Substitution des für x gefundenen Werthes f in den Ausdruck $\frac{d^2y}{dx^2}$ für diesen Ausdruck einen positiven Werth, so ist beides y' und y'' größer, als y. Folglich macht in diesem Fall $x = f$ das y zu einem Kleinsten.

Ex. Es sey $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$,

also $\frac{dy}{dx} = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2$

und $\frac{d^2y}{dx^2} = 20x^3 - 60x^2 + 30x$.

Setzt man nun

$$\frac{dy}{dx} = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 0,$$

so erhält man

$$x = 2 \pm 1.$$

Also 1) $x = 3$

2) $x = 1$.

Durch Substitution des ersten Werthes für x in den Ausdruck für $\frac{d^2y}{dx^2}$ bekommt man $\frac{d^2y}{dx^2} = 90$, und durch Substitution des zweiten in den Ausdruck für $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = -10$.

Durch den ersten Werth für x wird also y ein Kleinstes; durch den zweiten ein Größtes. Im ersten Fall ist $y = -26$; im zweiten $y = +2$.

Bisweilen erhält man gleich bei der Differentiation für

$\frac{d^2y}{dx^2}$ eine bestimmte Größe. Die Beschaffenheit derselben zeigt, ob y ein Größtes oder ein Kleinstes sey. Aus der Funktion

$$y = x^2 + 3x + 2$$

erhält man

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 3,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2,$$

$$\text{und } x = -\tfrac{3}{2}.$$

Die Funktion y wird also für $x = -\frac{3}{2}$ ein Kleinstes.

Wäre $x = f$ unmöglich, so könnte, wie leicht zu begreifen ist, ebenfalls kein Größtes oder Kleinstes statt haben.

Ex. Es sey $y = x^3 - ax^2 + bx - c$.

Man findet hieraus

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2ax + b$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 2a$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 6.$$

Setzt man nun $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2ax + b = 0$, so erhält man

$$1)\ x = \frac{a + \sqrt{(a^2 - 3b)}}{3}$$

$$2)\ x = \frac{a - \sqrt{(a^2 - 3b)}}{3}.$$

Hier gibt es, wenn $a^2 < 3b$ ist, weder ein Größtes noch ein Kleinstes.

V. Findet man das $\frac{d^2y}{dx^2}$ in IV. $= 0$, so kann man noch nicht wissen, ob y ein Größtes oder ein Kleinstes, oder ob es keins von beiden werde. Man setze, es sey $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, so ist, da auch $\frac{dy}{dx} = 0$ ist,

$$y' = y + \frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{k^3}{1.2.3} + \frac{d^4y}{dx^4} \cdot \frac{k^4}{1.2.3.4} + \ldots$$

und $$y'' = y - \frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{k^3}{1.2.3} + \frac{d^4y}{dx^4} \cdot \frac{k^4}{1.2.3.4} - \ldots$$

Wird nun, wenn man den für x gefundenen Werth in den Ausdruck für $\frac{d^3y}{dx^3}$ setzt, letzter eine bejahte oder eine verneinte Größe, so ergibt sich durch Wiederholung der Schlüsse in I., daß y weder ein Größtes, noch ein Kleinstes seyn kann. Wird aber $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$, und $\frac{d^4y}{dx^4}$, wenn man in dasselbe f statt x setzt, eine bejahte oder eine verneinte Größe, so zeigen die Schlüsse in IV., daß für einen bejahten Werth des $\frac{d^4y}{dx^4}$ das y ein Kleinstes, und für einen verneinten ein Größtes wird.

Ex. 1. Ist $y = b + (x - a^3)$, so ist

$$\frac{dy}{dx} = 3\,(x - a)^2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 3 \,.\, 2 \,.\, (x - a)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 3 \,.\, 2 \,.\, 1.$$

Setzt man nun $\frac{dy}{dx} = 3\,(x - a)^2 = 0$, so findet man $x = a$. Dieser Werth für x macht auch $\frac{d^2y}{dx^2} = 3.2.(x - a)$ zu Null. Da nun $\frac{d^3y}{dx^3}$ = einer bestimmten Zahl ist, so ist für die Funktion $y = b + (x - a)^3$ weder ein Größtes, noch ein Kleinstes möglich.

Ex. 2. Aus $y = b - (x - a)^4$ erhält man

$$\frac{dy}{dx} = -4\,(x - a)^3$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -4 \,.\, 3 \,.\, (x - a)^2$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, (x - a)$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = -4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1.$$

Das $\frac{dy}{dx} = -4(x-a)^3 = 0$ gibt $x = a$. Dieser Werth für x macht die Ausdrücke für $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ zu Null. Da nun der Werth für $\frac{d^4y}{dx^4}$ eine verneinte bestimmte Zahl ist, so wird y ein Größtes für $x = a$.

VI. Sollte der Werth f nicht bloß den Ausdruck für $\frac{d^3y}{dx^3}$, sondern auch den Ausdruck für $\frac{d^4y}{dx^4}$ zu Null machen, so müßte man den Werth von $x = f$ auch noch in den Ausdruck für $\frac{d^5y}{dx^5}$ setzen. Je nachdem nun hierdurch der Ausdruck für $\frac{d^5y}{dx^5}$ zu Null würde oder nicht, könnte ein Größtes oder ein Kleinstes statt finden, oder nicht. Bei der Zunullwerdung des Ausdruckes für $\frac{d^5y}{dx^5}$ fände ein Größtes statt, wenn man bei der Setzung des Werthes f in den Ausdruck für $\frac{d^6y}{dx^6}$ eine verneinte, und ein Kleinstes, wenn man bei dieser Setzung eine bejahte Größe erhielte.

Wie man weiter zu verfahren hätte, wenn auch $\frac{d^6y}{dx^6} = 0$ würde, das ergibt sich aus dem Bisherigen zur Genüge.

Ex. Es sey $y = (x-f)^6 + (x-f)^5 + (x-f)^4 + c$.

Also $\frac{dy}{dx} = (x-f)^3 . [6(x-f)^2 + 5(x-f) + 4]$.

Setzt man $6(x-f)^2 + 5(x-f) + 4 = P$, so erhält man ferner

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 3 . (x-f)^2 . P + (x-f)^3 . \frac{dP}{dx}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 6(x-f)P + 6(x-f)^2 . \frac{dP}{dx} + (x-f)^3 . \frac{d^2P}{dx^2}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 6.P + 18(x-f) . \frac{dP}{dx} + 9(x-f)^2 . \frac{d^2P}{dx^2} + (x-f)^3 . \frac{d^3P}{dx^3}.$$

Für $x = f$ wird $\frac{dy}{dx} = 0$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$, aber

$\frac{d^4y}{dx^4} = 6P$. Also wird y ein Größtes oder ein Kleinstes, je nachdem $6 . P$ verneint oder bejaht ist.

§. 244. Nach den bisherigen Vorschriften läßt sich auch untersuchen, ob und in welchen Fällen die eine unbekannte Größe in einer ungesonderten Funktion zwischen den zwei Größen x und y ein Größtes oder ein Kleinstes werde.

Ex. Es sey $y^2 - 2mxy + x^2 - a = 0$.

Aus dieser Gleichung, in welcher man das y als eine Funktion von x betrachten kann, findet man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{my - x}{y - mx}.$$

Hieraus bekommt man, wenn man $\frac{dy}{dx} = 0$ setzt,

$$y = \frac{x}{m}.$$

Um den Werth von x, der ein Größtes oder ein Kleinstes, im Fall ein solches Statt findet, gibt, zu erhalten, muß man den hier für y gefundenen Werth in die gegebene Gleichung setzen. Man erhält hierdurch

$$\frac{x^2}{m^2} - x^2 - a^2 = 0$$

$$\text{und } x = \pm \sqrt{\frac{m^2a^2}{1 - m^2}}.$$

Also ist nun

$$y = \pm \sqrt{\frac{a^2}{1 - m^2}}.$$

Das zweite Differential der gegebenen Gleichung ist

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{m^2y - y + (x - m^2x) . \frac{dy}{dx}}{(y - mx)^2}.$$

Nun ist aber angenommen, daß $\frac{dy}{dx} = 0$ ist, und aus dieser Annahme hat sich ergeben $y = \frac{x}{m}$.

Also ist

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{m^2y - y}{(y - mx)^2} = \frac{m^2 \cdot \frac{x}{m} - \frac{x}{m}}{\left(\frac{x}{m} - mx\right)^2}$$

$$= \frac{mx - \frac{x}{m}}{\left(\frac{x}{m} - mx\right)^2}$$

$$= - \frac{\frac{x}{m} - mx}{\left(\frac{x}{m} - mx\right)^2}$$

$$= - \frac{1}{\frac{x}{m} - mx}$$

$$= - \frac{m}{x(1 - m^2)}.$$

Hieraus findet man, wenn man für x seinen Werth setzt,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-m}{1 - m^2} \cdot \pm \sqrt{\frac{1 - m^2}{m^2a^2}}.$$

Also ist

$$1) \; \frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{1}{a \cdot \sqrt{(1 - m^2)}}$$

$$2) \; \frac{d^2y}{dx^2} = + \frac{1}{a \cdot \sqrt{(1 - m^2)}}.$$

Also erhält y einen größten Werth für $x = + \frac{ma}{\sqrt{(1-m^2)}}$ und einen kleinsten für $x = - \frac{ma}{\sqrt{(1 - m^2)}}$. Des y größter Werth ist $\frac{a}{\sqrt{(1 - m^2)}}$ und kleinster $- \frac{a}{\sqrt{(1 - m^2)}}$.

Es ist klar, daß, wenn ein größter oder ein kleinster Werth für y statt finden soll, m^2 kleiner, als 1, also m ein echter Bruch seyn muß.

§. 245. I. In der Funktion $u = f(x, y)$ können für x und y alle mögliche Werthe gesetzt werden. Vorausgesetzt nun,

daß für $u = f(x, y)$ ein Größtes oder ein Kleinstes statt finde, gibt es unter allen möglichen Werthen, welche man für x und y setzen kann, nur gewisse bestimmte, welche u zu einem Größten oder einem Kleinsten machen. Wüßte man von diesen bestimmten Werthen für x und y, den für y, so könnte man den Werth für x nach den bisherigen Lehren bestimmen. Denn alsdann wäre y unveränderlich und u eine Funktion bloß von x.

II. Man setze in $u = f(x, y)$ das y beständig und das x veränderlich und bestimme den größten oder den kleinsten Werth, den u unter dieser Voraussetzung haben kann.

Ex. Es sey

$$u = x^2 + xy + y^2 - ax - by.$$

Hieraus erhält man, y beständig gesetzt,

$$\frac{du}{dx} = 2x + y - a.$$

Setzt man nun

$$2x + y - a = 0,$$

so bekommt man

$$x = \frac{a - y}{2} = \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}y.$$

Die Funktion u wird also für $x = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}y$ ein Größtes oder ein Kleinstes, falls das eine oder das andere für dieselbe statt findet.

III. Wenn man den Werth von x, der sich unter der Voraussetzung, daß y beständig sey, aus $u = f(x, y)$ ergibt, in $u = f(x, y)$ setzt, so erhält man den größten oder kleinsten Werth für u in einem Ausdruck, der, außer beständigen Größen, bloß y enthält.

Ex. Setzt man $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}y$ statt x in $u = x^2 + xy + y^2 - ax - by$, so erhält man

$$u = -\tfrac{1}{2}a^2 + (\tfrac{1}{2}a - b)\,y + \tfrac{3}{4}y^3.$$

IV. Da nun aber y, obgleich als beständig angenommen, doch noch unbestimmt und veränderlich ist, so ist das gefundene Größte oder Kleinste eine Funktion von y. Aus dieser läßt

sich, nach den frühern Entwicklungen, das größte oder kleinste u unter der Voraussetzung finden, daß auch y veränderlich ist.

Ex. Aus

$$u = -\tfrac{1}{2}a^2 + (\tfrac{1}{2}a - b)\,y + \tfrac{3}{4}y^2 \;(\odot)$$

bekommt man

$$\frac{du}{dy} = \tfrac{1}{2}a - b + \tfrac{3}{2}y$$

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \tfrac{3}{2}.$$

Setzt man nun

$$\tfrac{1}{2}a - b + \tfrac{3}{2}y = 0,$$

so ergibt sich

$$y = \frac{2b - a}{3}.$$

Die Funktion $(\odot)$ wird also für $y = \frac{2b - a}{3}$ ein Kleinstes.

V. Man erhält hierdurch das größte oder kleinste u unter der Voraussetzung, daß sowohl y, als x in $u = f(x, y)$ veränderlich ist.

Ex. Die Funktion

$$u = x^2 + xy + y^2 - ax - by$$

wird ein Kleinstes für $y = \frac{2b - a}{3}$ und $x = \frac{2a - b}{3}$. Man erhält diesen Werth für x, wenn man in den Werth für x in (II. Ex.), den Werth für y in (IV. Ex.) setzt.

Ex. Eine Zahl a in drei Theile so zu theilen, daß das Produkt ihrer Quadrate ein Größtes sey.

Ist der eine Theil x, und der andere y, so ist der dritte $a - x - y$, und das Produkt der Quadrate der Theile $x^2y^2(a - x - y)^2$. Also ist

$$u = x^2y^2(a - x - y)^2.$$

Hieraus folgt, wenn y als beständig angenommen wird,

$$\frac{du}{dx} = 2xy^2(a - x - y)(a - 2x - y).$$

Dies muß $= 0$ gesetzt werden. Da aber keiner der Theile, in welche a getheilt werden soll, fehlen darf, so darf weder

x, noch y, noch $a - x - y = 0$ gesetzt werden. Also muß man setzen

$$a - 2x - y = 0.$$

Hieraus ergibt sich

$$x = \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}y.$$

Setzt man diesen Werth für x in $u = x^2y^2(a-x-y)^2$, so erhält man

$$u = y^2 \cdot (\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}y)^4.$$

Man findet hieraus

$$\frac{du}{dy} = 2y \cdot (\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}y)^4 - 2y^2 (\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}y)^3.$$

Setzt man diesen Ausdruck $= 0$, so bekommt man

$$2y^2 (\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}y)^3 = 2y (\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}y)^4.$$

Dies gibt $y = \frac{1}{3}a$.

Es ist ferner

$$\frac{d^2u}{dy^2} = 2 \cdot (\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}y)^4 - 8 \cdot y (\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}y)^3 + y^2 (\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}y)^2.$$

Wenn man hierin $y = \frac{1}{3}a$ setzt, so bekommt man

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{3}{81}a^4 - \frac{8}{81}a^4.$$

Setzt man $\frac{1}{3}a$ statt y in $x = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}y$, so erhält man $x = \frac{1}{3}a$.

Also wird $u = x^2y^2(a-x-y)^2$ ein Größtes für $x = \frac{1}{3}a$, und $y = \frac{1}{3}a$.

Siebentes Kapitel.

Von der Bedeutung des in manchen Fällen gefundenen Ausdrucks $\frac{0}{0}$.

§. 246. Manchmal macht bei einer gebrochenen Funktion von Einer veränderlichen Größe ein bestimmter Werth der letztern sowohl den Zähler, als den Nenner der Funktion zu Null. Hierdurch erhält man den Ausdruck $\frac{0}{0}$. Dieser kann

jede Größe bedeuten: eine endliche, eine unendlich große, auch Null.

Ex. 1. Es sey $y = \frac{a^2 - x^2}{a - x}$ und man setze $x = a$. Man bekommt hierdurch $y = \frac{0}{0}$. Es ist aber auch $y = \frac{(a+x)(a-x)}{a - x}$ $= a + x$. Für $x = a$ ergibt sich $y = 2a$. Also ist hier $\frac{0}{0} = 2a$.

Ex. 2. Setzt man $y = \frac{a^2 - x^2}{(a - x)^2}$ und $x = a$, so erhält man $y = \frac{0}{0}$. Nun ist auch $y = \frac{(a+x)(a-x)}{(a-x)(a-x)} = \frac{a + x}{a - x}$. Hieraus erhält man, wenn $x = a$ gesetzt wird, $y = \frac{2a}{0}$ $= \infty$. Also ist hier $\frac{0}{0} = \infty$.

Ex. 3. Aus $y = \frac{(a - x)^2}{a^3 - x^3} = \frac{(a - x)(a - x)}{(a^2 + ax + x^2)(a - x)}$ findet man für $x = a$ den Ausdruck $\frac{0}{3a^2} = 0$.

§. 247. Aufg. Sowohl $f(x)$, als auch $F(x)$ werde für einen gewissen Werth von x zu Null; man soll bestimmen, was unter dieser Voraussetzung der Werth des Bruchs $\frac{f(x)}{F(x)}$ sey.

Aufl. Setzt man $x + k$ statt x, so erhält man

$$f(x + k) = f(x) + \frac{df(x)}{dx}.k + \frac{d^2f(x)}{1.2.dx^2}.k^2 + \frac{d^3f(x)}{1.2.3.dx^3}.k^3 + \ldots$$

$$F(x + k) = F(x) + \frac{dF(x)}{dx}.k + \frac{d^2F(x)}{1.2.dx^2}.k^2 + \frac{d^3F(x)}{1.2.3.dx^3}.k^3 + \ldots$$

Der Kürze wegen setze man $\frac{df(x)}{dx} = p$, $\frac{d^2f(x)}{dx^2} = q$, $\frac{d^3f(x)}{dx^3} = r, \ldots$ und $\frac{dF(x)}{dx} = p'$, $\frac{d^2F(x)}{dx^2} = q'$, $\frac{d^3F(x)}{dx^3} = r', \ldots$

Also ist

$$\frac{f(x+k)}{F(x+k)} = \frac{f(x) + pk + \frac{1}{2}qk^2 + \frac{1}{6}rk^3 + \ldots}{F(x) + pk' + \frac{1}{2}q'k^2 + \frac{1}{6}r'k^3 + \ldots} \quad (\odot)$$

Nun setze man $x = a$. Da hierdurch sowohl $f(x)$, als auch $F(x) = 0$ wird, so kann man beides aus dem Ausdrucke ($\odot$) weglassen.

Man hat also

$$\frac{f(a+k)}{F(a+k)} = \frac{pk + \frac{1}{2}qk^2 + \frac{1}{6}rk^3 + \ldots}{p'k + \frac{1}{2}q'k^2 + \frac{1}{6}r'k^3 + \ldots}$$

Durch die Division des Zählers und des Nenners dieses Ausdrucks durch k bekommt man

$$\frac{f(a+k)}{F(a+k)} = \frac{p + \frac{1}{2}qk + \frac{1}{6}rk^2 + \ldots}{p' + \frac{1}{2}q'k + \frac{1}{6}r'k^2 + \ldots}$$

Nun sey $k = 0$. Dann ergibt sich

$$\frac{f(a)}{F(a)} = \frac{p}{p'} = \frac{df(x):dx}{dF(x):dx}.$$

Um also den Werth des Bruchs $\frac{f(x)}{F(x)}$ für den Fall zu finden, daß für $x = a$ sowohl der Zähler, als der Nenner verschwindet, suche man die Differentialquotienten $\frac{df(x)}{dx}$ und $\frac{dF(x)}{dx}$, setze in denselben $x = a$, und dividire den auf diese Weise aus des gegebenen Bruches Zähler abgeleiteten Ausdruck durch den aus dem Nenner hergeleiteten.

Ex. 1. Es sey $\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{a^n - x^n}{a^m - x^m}$ und $x = a$.

Also $\frac{df(x)}{dx} = -nx^{n-1}$

und $\frac{dF(x)}{dx} = -mx^{m-1}$.

Folglich $\frac{df(x):dx}{dF(x):dx} = \frac{n}{m} . x^{n-m}$

und $\frac{f(a)}{F(a)} = \frac{n}{m} . a^{n-m}$.

Ex. 2. Es sey $\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{a - x}{\text{Cot}\,\frac{\pi x}{2a}}$, wo π die halbe Peripherie des Kreises bedeutet, und $x = a$.

Es ist $\frac{df(x)}{dx} = -1$

$$\text{und } dF(x) = d\,\text{Cot}\,\frac{\pi x}{2a} = \frac{-\frac{d\pi x}{2a}}{\left(\text{Sin}\,\frac{\pi x}{2a}\right)^2},$$

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{-\frac{\pi}{2a}}{\left(\text{Sin}\,\frac{\pi x}{2a}\right)^2} = \frac{-\pi}{2a.\left(\text{Sin}\,\frac{\pi x}{2a}\right)^2}$$

$$\frac{df(x):dx}{dF(x):dx} = \frac{2a.\left(\text{Sin}\,\frac{\pi x}{2a}\right)^2}{\pi}.$$

Folglich $\frac{f(a)}{F(a)} = \frac{2a}{\pi}$.

Ex. 3. Es sey $\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{a^x - b^x}{x}$ und $x = 0$.

Es ist $\frac{df(x)}{dx} = a^x.\lg a - b^x \lg b$

$$\frac{dF(x)}{dx} = 1$$

$$\frac{df(x):dx}{dF(x):dx} = a^x.\lg a - b^x.\lg b.$$

Folglich $\frac{f(0)}{F(0)} = \lg a - \lg b$.

§. 248. Es kann geschehen, daß für $x = a$ sowohl p als $p' = 0$ werde. In diesem Fall ist

$$\frac{f(a+k)}{F(a+k)} = \frac{\frac{1}{2}q + \frac{1}{6}rk + \ldots}{\frac{1}{2}q' + \frac{1}{6}r'k + \ldots}$$

$$\text{und } \frac{f(a)}{F(a)} = \frac{q}{q'} = \frac{d^2f(x):dx^2}{d^2F(x):dx^2}.$$

Auch hier muß in dem Differentialquotienten a statt x gesetzt werden.

Ex. Man soll den Werth von $\dfrac{a\sqrt[3]{[4(a^3+x^3)]}-ax-a^2}{\sqrt{[2.(a^2+x^2)]}-x-a}$ für $x = a$ bestimmen.

Hier ist

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{4^{\frac{1}{3}}.ax^2 - a(a^3+x^3)^{\frac{2}{3}}}{(a^3+x^3)^{\frac{2}{3}}} \text{ (A.)}$$

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{2^{\frac{1}{2}}.x - (a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}}{(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}} \text{ (B.)}$$

Setzt man hier $x = a$, so erhält man

$$\frac{f(a)}{F(a)} = \frac{0}{0}.$$

Man hat also $\dfrac{d^2f(x)}{dx^2}$ und $\dfrac{d^2F(x)}{dx^2}$ zu suchen.

Aus (A.) ergibt sich $\dfrac{d^2f(x)}{dx^2} =$

$$\frac{(a^3+x^3)^{\frac{1}{3}}.[4^{\frac{1}{3}}.a.2x - \frac{a.\frac{2}{3}.3x^2}{(a^3+x^3)^{\frac{1}{3}}}] - [4^{\frac{1}{3}}.ax^2 - a(a^3+x^3)^{\frac{2}{3}}].\frac{\frac{2}{3}.3x^2}{(a^3+x^3)^{\frac{1}{3}}}}{(a^3+x^3)^{\frac{4}{3}}}$$

und aus (B.) $\dfrac{d^2F(x)}{dx^2} =$

$$\frac{(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}.[2^{\frac{1}{2}} - \frac{x}{(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}}] - [2^{\frac{1}{2}}x - (a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}].\frac{x}{(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}}}{a^2+x^2}.$$

Setzt man nun $x = a$, so bekommt man

$$\frac{f(a)}{F(a)} = 2a.$$

Wären für $x = a$ auch q und q′ jedes $= 0$, so erhielt man

$$\frac{f(a)}{F(a)} = \frac{r}{r'} = \frac{d^3f(x) : dx^3}{d^3F(x) : dx^3}$$

u. s. w.

§. 249. Durch das eben auseinandergesetzte Verfahren läßt sich in manchen Fällen der Werth von $\frac{0}{0}$ nicht bestimmen. Man nehme z. B. an, man solle den Werth der Funktion $\frac{(x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}{(x - a)^{\frac{3}{2}}}$ für $x = a$ finden.

Hier ist $\frac{df(x)}{dx} = 3x \cdot (x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{dF(x)}{dx} = \tfrac{3}{2} \cdot (x - a)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{df(x) : dx}{dF(x) : dx} = \frac{3x\,(x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{3}{2}\,(x - a)^{\frac{1}{2}}}.$$

Setzt man in dem letztern Ausdruck $x = a$, so erhält man

$$\frac{f(a)}{F(a)} = \frac{0}{0}.$$

Durch weitere Differentiirung bekommt man

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = 3\,(x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{3x^2}{(x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{3\,(x^2 - a^2) + 3x^2}{(x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{d^2 F(x)}{dx^2} = \tfrac{3}{4} \cdot \frac{1}{(x - a)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{d^2 f(x) : dx^2}{d^2 F(x) : dx^2} = \frac{\frac{3\,(x^2 - a^2) + 3x^2}{(x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}}}{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{(x - a)^{\frac{1}{2}}}}$$

$$= \frac{4\,[(x^2 - a^2) + x^2]\,(x - a)^{\frac{1}{2}}}{(x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Hier findet man wieder für $x = a$

$$\frac{f(a)}{F(a)} = \frac{0}{0}.$$

Man sieht wohl, daß, wenn man weiter differentiirt und den gebrochenen Bruch, der sich hierbei für $\frac{d^3 f(x) : dx^3}{d^3 F(x) : dx^3}$ er=

gibt, auf einen einfachen zurückführt, man für $\frac{d^3f(x):dx^3}{d^3F(x):dx^3}$ einen Bruch bekommt, dessen Zähler die Potenz $(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}$ und dessen Nenner die Potenz $(x-a)^{\frac{1}{2}}$ als Faktor enthält, und daß man also für $x=a$ wieder $\frac{f(a)}{F(a)}=\frac{0}{0}$ findet u. s. w.

Durch das folgende Verfahren läßt sich immer der Werth von $\frac{0}{0}$ finden.

§. 250. Die beiden Funktionen $f(x)$ und $F(x)$ werden jede für $x=a$ zu Null, daß also $\frac{f(a)}{F(a)}=\frac{0}{0}$ ist. Man setze in $\frac{f(x)}{F(x)}$ statt x, $a+k$ und entwickle in $\frac{f(a+k)}{F(a+k)}$ sowohl den Zähler, als den Nenner in einer Reihe, die nach k fortschreitet und steigend ist. Die Entwicklung geschieht nach dem binomischen oder dem polynomischen Satze. Man erhält, die Entwicklung allgemein dargestellt, durch dieselbe

$$\frac{f(a+k)}{F(a+k)}=\frac{Ak^m+Bk^n+Ck^p+\ldots}{A'k^{m'}+B'k^{n'}+C'k^{p'}+\ldots}$$

Die Potenzen von k steigen in der Ordnung, in welcher sie hier auf einander folgen. Ist nun $m=m'$, so wird, wenn man den Zähler und Nenner der Entwicklung durch k^m dividirt,

$$\frac{f(a+k)}{F(a+k)}=\frac{A+Bk^{n-m}+Ck^{p-m}+\ldots}{A'+B'k^{n'-m}+C'k^{p'-m}+\ldots}$$

Setzt man nun $k=0$, so erhält man

$$\frac{f(a)}{F(a)}=\frac{A}{A'}.$$

Ist $m>m'$, so wird

$$\frac{f(a+k)}{F(a+k)}=\frac{Ak^{m-m'}+Bk^{n-m'}+Ck^{p-m}+\ldots}{A'\qquad+B'k^{n'-m'}+C'k^{p'-m'}+\ldots}$$

und $\frac{f(a)}{F(a)}=\frac{0}{A'}=0.$

Ist endlich $m < m'$, so ist

$$\frac{f(a+k)}{F(a+k)} = \frac{A + Bk^{n-m} + Ck^{p-m} + \ldots}{A'k^{m'-m} + B'k^{n'-m} + C'k^{p'-m} + \ldots}$$

und $\frac{f(a)}{F(a)} = \frac{A}{0} = 00.$

Ex. Es sey $\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{(x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}{(x-a)^{\frac{3}{2}}}$. Man erhält, wenn man $a + k$ statt x setzt und entwickelt,

$$\frac{f(a+k)}{F(a+k)} = \frac{(2ak + k^2)^{\frac{3}{2}}}{k^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{(2ak)^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} \cdot (2ak)^{\frac{3}{2}-1} \cdot k^2 + \frac{3}{8} \cdot (2ak)^{\frac{3}{2}-2} \cdot k^4 + \ldots}{k^{\frac{3}{2}}}.$$

Man findet hieraus

$$\frac{f(a)}{F(a)} = (2a)^{\frac{3}{2}}.$$

§. 251. Der Zähler und der Nenner eines Bruchs $\frac{f(x)}{F(x)}$ werden bisweilen für einen bestimmten Werth a des x zugleich unendlich. Um zu bestimmen, was in diesem Fall ein solcher Bruch bedeute, bedenke man, daß $\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{\frac{1}{F(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$ ist. Dieser letzte Ausdruck wird für $x = a$ zu $\frac{0}{0}$ und der hier angeführte Fall ist also zurückgeführt auf den im Vorhergehenden erörterten.

Ex. Für $x = a$ wird $\frac{3(x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} + 3x^2(x^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}}}{\frac{3}{4}(x-a)^{-\frac{1}{2}}}$ $= \frac{00}{00}$. Man leitet aus dieser Funktion die ihr gleiche $\frac{4(x-a)^{\frac{1}{2}} \cdot [(x^2 - a^2) + 3x^2]}{(x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}}$ her, welche für $x = a$ zu $\frac{0}{0}$ wird.

§. 252. Manchmal wird in einem Produkt $P \cdot Q$, dessen Faktoren Funktionen von x sind, für $x = a$ der eine $P = 0$, und der andere $Q = \infty$. Was ein solches Produkt bedeutet, läßt sich ebenfalls nach dem Vorhergehenden ausmitteln. Es ist nämlich

$$P \cdot Q = \frac{P}{\frac{1}{Q}}. \text{ Also für } x = a$$

$$P \cdot Q = \frac{P}{\frac{1}{Q}} = \frac{0}{0}.$$

Ex. In dem Produkt $(a - x) \cdot \mathrm{Tg} \frac{\pi x}{2a}$, in welchem π die halbe Kreisperipherie für den Halbmesser $= 1$ bedeutet, wird für $x = a$ der Faktor $a - x = 0$, und der Faktor $\mathrm{Tg} \frac{\pi x}{2a} = \infty$; man soll den Werth dieses Produkts für $x = a$ bestimmen.

Hier ist $P \cdot Q = \frac{P}{\frac{1}{Q}} = \frac{a - x}{\frac{1}{\mathrm{Tg} \frac{\pi x}{2a}}} = \frac{a - x}{\mathrm{Cot} \frac{\pi x}{2}}$.

(Siehe §. 247. Ex. 2.)

§. 253. Manchmal werden zwei Funktionen P und Q von x für einen bestimmten Werth des x, jede, unendlich und man kann wissen wollen, was in diesem Falle $P - Q$ bedeute. Hierher gehörige Fragen lassen sich ebenfalls auf die früher erörterten zurückführen.

Ex. 1. Es sey $P - Q = \frac{1}{1 - x} - \frac{2}{1 - x^2}$, welches für $x = 1$ zu $\infty - \infty$ wird.

Man bringe die beiden Brüche unter einerlei Benennung. Hierdurch erhält man $P - Q = \frac{x - 1}{1 - x^2}$. Dieses wird für $x = 1$ zu $\frac{0}{0} = -\frac{1}{2}$.

Ex. 2. Es sey $P - Q = \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\lg x}$. Dieser Ausdruck wird $= 00 - 00$ für $x = 1$.

Bringt man die beiden Brüche, aus welchen er besteht, unter einerlei Benennung, so erhält man $P - Q = \frac{x \cdot \lg x - x + 1}{(x-1)\lg x}$, d. i. einen Ausdruck, der für $x = 1$ zu $\frac{0}{0}$ wird.

Setzt man hier $1 + k$ statt x, so bekommt man nach §. 250.

$$\frac{f(1+k)}{F(1+k)} = \frac{(1+k) \cdot \lg(1+k) - k}{k \lg(1+k)}.$$

Es ergibt sich hieraus, wenn man $\lg(1+k)$ durch eine Reihe ausdrückt,

$$\frac{f(1+k)}{F(1+k)} = \frac{(1+k)(k - \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{3}k^3 - \ldots) - k}{k \cdot (k - \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{3}k^3 - \ldots)}$$

$$= \frac{k + \frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{6}k^3 + \ldots - k}{k^2 - \frac{1}{2}k^3 + \frac{1}{3}k^4 - \ldots}$$

$$= \frac{+\frac{1}{2} - \frac{1}{6}k - \ldots}{1 - \frac{1}{2}k + \frac{1}{3}k^2 - \ldots}$$

Setzt man nun $k = 0$, so findet man $\frac{f(1)}{F(1)} = +\frac{1}{2} = P - Q$ für $x = 1$.

Zweite Abtheilung.

Die

Integral-Rechnung.

Die Integral-Rechnung.

Erstes Kapitel.

Grundlehren der Integralrechnung überhaupt und Integration der algebraischen Funktionen von Einer veränderlichen Größe durch endliche Ausdrücke insbesondere.

§. 254. Erkl. Einer Differential-Größe Integral heißt die Größe, durch deren Differentiation die Differentialgröße entstehen würde. Eine Differentialgröße integriren, heißt ihr Integral finden.

Daß eine Differentialgröße integrirt werden oder man sich ihr Integral denken soll, zeigt man durch den Buchstaben $\int$ an, welchen man vor dieselbe setzt.

§. 255. Aufg. Man soll die Differentialgröße $x^n dx$ integriren.

Aufl. Die Differentialgröße $x^n . dx$ ist dadurch aus einer Funktion von x entstanden, daß man mit letzterer folgende Operationen vorgenommen hat:

I. Man hat den Exponenten der Potenz von x um 1 vermindert. Der Exponent der Potenz von x ist also $n+1$ in der Funktion gewesen.

II. Man hat die Funktion, nach Verminderung des Exponenten der Potenz von x um 1, mit $n+1$ multiplicirt. Folglich ist die Funktion durch $n+1$ dividirt gewesen.

III. Man hat, was man nach der Verminderung des Exponenten der Potenz von x um 1 und nach der angeführten Multiplication mit $n+1$ hatte, noch mit dx multiplicirt.

Folglich ist die Funktion, aus welcher das Differential $x^n . dx$ entstanden ist, $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ gewesen.

Für die Integration der Größe $x^n dx$ ergibt sich demnach folgende Regel: Man dividire $x^n dx$ durch dx, addire zu dem Exponenten n die Einheit und dividire die so entstandene Größe x^{n+1} durch $n + 1$; die Größe $\frac{x^{n+1}}{n+1}$, welche man durch dieses Verfahren erhält, ist das Integral von $x^n . dx$.

§. 256. Daß $\int x^n . dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ ist, davon kann man sich auch dadurch überzeugen, daß man $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ differentiirt. Das Integral $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ ist nämlich richtig, wenn es differentiirt $x^n . dx$ gibt.

§. 257. Von $\frac{b . x^{n+1}}{n+1}$ ist das Differential $bx^n dx$. Hat man also das Differential $bx^n dx$, wo das Differential $x^n dx$ noch mit einer beständigen Größe b multiplicirt ist, zu integriren, so muß man das Integral von $x^n dx$ noch mit b multipliciren.

Ueberhaupt: Ist ein Differential mit einer beständigen Größe multiplicirt oder dividirt, so muß auch sein Integral mit derselben Größe multiplicirt oder dividirt werden.

§. 258. Aus der Differentialrechnung ist bekannt, daß die Summe oder der Unterschied veränderlicher und beständiger Größen einerlei Differential mit den bloß veränderlichen Grössen hat. Es ist z. B. $d(x^n + a) = nx^{n-1} . dx$ und auch $d(x^n) = nx^{n-1} dx$. Hieraus folgt, daß man einem Integral noch eine beständige Größe beifügen kann. Sie heißt die Constante und wird allgemein durch Const. oder C bezeichnet. Häufig ist sie willkührlich; oft wird sie aber auch durch die Natur einer Größe bestimmt.

§. 259. Es sey $y = A + C$, wo A eine Funktion von x bedeuten soll, also y eine Funktion von x ist.

Weiß man nun, daß y einen gewissen bestimmten Werth b bekommt, wenn man x einen gewissen bestimmten Werth a gibt, so kann man die Constante C bestimmen.

Für $x = a$ werde $A = \mathfrak{A}$, so ist

$$b = \mathfrak{A} + C,$$

$$\text{also } C = b - \mathfrak{A}.$$

§. 260. Da das Integral eines Differentials diejenige Funktion ist, aus welcher man das Differential herleiten kann, so hat man aus den Lehren der Differentialrechnung ohne Weiteres folgende Integrale:

I. $\int dx = x + C.$

II. $\int a dx = ax + C.$

III. $\int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + C.$

IV. $\int [vdu + udv] = uv + C$

V. $\int \frac{vdu - udv}{v^2} = \frac{u}{v} + C$

(IV. und V.: wo u und v Funktionen von x sind.)

VI. $\int \frac{dx}{x} = \lg x + C.$

VII. $\int \pm \frac{n \cdot b \cdot dx}{a \pm bx} = \lg (a \pm bx)^n + C.$

VIII. $\int \pm \frac{a \cdot dx}{a^2 - x^2} = \lg \left(\frac{a \pm x}{a \mp x}\right)^{\frac{1}{2}} + C.$

IX. $\int \pm \frac{bmx^{m-1} dx}{a \pm bx^m} = \lg (a \pm bx^m) + C.$

X. $\int \frac{a\, dx}{x (a \pm x^2)} = \lg \frac{x}{\sqrt{(a \pm x^2)}} + C.$

XI. $\int \frac{dx}{\sqrt{(a + x^2)}} = \lg [x + \sqrt{(a + x^2)}] + C.$

XII. $\int \frac{a\, dx}{x . \sqrt{(a^2 - x^2)}} = -\lg \frac{a + \sqrt{(a^2 - x^2)}}{x}$

$$= -\lg \frac{\sqrt{(a + x)} + \sqrt{(a - x)}}{\sqrt{(a + x)} - \sqrt{(a - x)}}.$$

XIII. $\int n\,(\lg x)^{n-1} \cdot \frac{dx}{x} = (\lg x)^n + C.$

XIV. $\int \frac{dx}{x \cdot \lg x} = \lg \lg x + C.$

XV. $\int a^x \cdot \lg a \cdot dx = a^x + C.$

XVI. $\int e^x \cdot dx = e^x + C;$

$\int m e^{mx} dx = e^{mx} + C.$

XVII. $\int (1 + \lg x)\, x^x dx = x^x + C.$

XVIII. $\int \mathrm{Cos}\, x \cdot dx = \mathrm{Sin}\, x + C.$

XIX. $\int . \mathrm{Sin}\, x \cdot dx = -\mathrm{Cos}\, x + C$

$= \mathrm{Sin\,vers}\, x + C.$

XX. $\int \mathrm{Sin}\, x \cdot dx = -\mathrm{Cos\,vers}\, x + C.$

XXI. $\int \frac{dx}{\mathrm{Cos}\, x^2} = \int \mathrm{Sec}\, x^2 dx = \mathrm{Tg}\, x + C.$

XXII. $\int \frac{\mathrm{Sin}\, x \cdot dx}{\mathrm{Cos}\, x^2} = \mathrm{Sec}\, x + C.$

XXIII. $\int \frac{dx}{\mathrm{Sin}\, x^2} = -\mathrm{Cot}\, x + C;$

$\int \mathrm{Cosec}\, x^2 dx = -\mathrm{Cot}\, x + C.$

XXIV. $\int \frac{\mathrm{Cot}\, x \cdot dx}{\mathrm{Sin}\, x} = -\mathrm{Cosec}\, x + C;$

$\int \mathrm{Cosec}\, x . \mathrm{Cot}\, x . dx = -\mathrm{Cosec}\, x + C.$

XXV. $\int \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)}} = \mathrm{arc.\,Sin}\, y + C.$

XXVI. $\int \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)}} = -\mathrm{arc.\,Cos}\, y + C.$

XXVII. $\int \frac{dy}{\sqrt{(2y - y^2)}} = \mathrm{arc.\,Sin\,vers}\, y + C.$

XXVIII. $\int \frac{dy}{\sqrt{(2y - y^2)}} = -\mathrm{arc.\,Cos\,vers}\, y + C.$

XXIX. $\int \frac{dy}{1 + y^2} = \mathrm{arc.\,Tg}\, y + C.$

XXX. $\int \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{\sqrt{(y^2 - 1)}} \cdot dy = \mathrm{arc.\,Sec}\, y + C.$

XXXI. $\int \frac{dy}{1 + y^2} = -\mathrm{arc.\,Cot}\, y + C.$

XXXII. $\int \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{\sqrt{(y^2 - 1)}} \cdot dy = - \text{arc. Cosec } y + C.$

§. 261. Nach diesen Formeln lassen sich viele Differentiale integriren. Man muß aber den Differentialen, welche man nach denselben integriren will, immer erst die Form der im vorigen §. befindlichen Differentiale geben, wenn sie selbige nicht schon haben.

Beispiele.

I. Es ist

1) $\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{1}{4} \cdot x^4 + C.$

2) $\int 5x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{5x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + C = 3x^{\frac{5}{3}} + C.$

3) $\int \frac{8dx}{x^4} = 8\int x^{-4} dx = \frac{8x^{-4+1}}{-4+1} + C = -\frac{8}{3}x^{-3} + C.$

4) $\int \frac{10\, dx}{\sqrt{x}} = 10\int x^{-\frac{1}{2}} \cdot dx = \frac{10x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = 20x^{\frac{1}{2}} + C.$

II. Es ist

1) $\int m x^{-1} dx = m\int \frac{dx}{x} = m \lg x + C.$

2) $\frac{7dx}{5+x} = \lg(5+x)^7 + C = 7 \cdot \lg(5+x) + C.$

3) $\int b^x dx = \int \frac{b^x \cdot \lg b \cdot dx}{\lg b} = \frac{b^x}{\lg b} + C.$

III. Es ist

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{(r^2 - x^2)}} = \int \frac{\frac{dx}{r}}{\frac{1}{r} \cdot \sqrt{(r^2 - x^2)}} = \frac{d\frac{x}{r}}{\sqrt{(1 - \frac{x^2}{r^2})}}$

$= \text{arc. Sin } \frac{x}{r} + C = - \text{arc. Cos } \frac{x}{r} + C.$

2) $\int \frac{a\, dx}{b + cx^2} = \int \frac{\frac{a}{c} \cdot dx}{\frac{b}{c} + x^2} = \int \frac{\frac{a}{c}\, dx}{\sqrt{\frac{b}{c}} \cdot \sqrt{\frac{b}{c}} + x^2}$

$= \int \frac{\frac{a}{c} \cdot dx}{m^2 + x^2}$ (wo $m = \sqrt{\frac{b}{c}}$ ist)

$$= \int \frac{\frac{a}{c} \cdot \frac{1}{m^2} \cdot dx}{1 + \frac{x^2}{m^2}} = \int \frac{\frac{a}{c} \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{dx}{m}}{1 + \frac{x^2}{m^2}}$$

$$= \frac{a}{c} \cdot \frac{1}{m} \cdot \text{arc. Tg} \frac{x}{m} + C$$

$$= \frac{a}{c} \cdot \sqrt{\frac{c}{b}} \cdot \text{arc. Tg} \frac{x \cdot \sqrt{c}}{\sqrt{b}} + C.$$

$$3) \int \frac{a \cdot dx}{b - cx^2} = \int \frac{\frac{a}{c} \cdot dx}{\frac{b}{c} - x^2} = \int \frac{\frac{a}{c} \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{dx}{m}}{1 - \frac{x^2}{m^2}},$$

$$(\text{wo } m = \sqrt{\frac{b}{c}}) = \frac{a}{c} \cdot \frac{1}{m} \cdot \lg \left(\frac{1 + \frac{x}{m}}{1 - \frac{x}{m}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{a}{c} \cdot \sqrt{\frac{c}{b}} \cdot \lg \left[\frac{1 + x \cdot \sqrt{\frac{c}{b}}}{1 - x \cdot \sqrt{\frac{c}{b}}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{a^2}{bc}} \cdot \lg \frac{1 + x \cdot \sqrt{\frac{c}{b}}}{1 - x \cdot \sqrt{\frac{c}{b}}}.$$

IV. Es sey $dy = \frac{dx}{a + bx + cx^2}$.

Um hier das zweite Glied des Nenners wegzubringen, setze man

$$x = u - \frac{b}{2c}.$$

Man erhält hierdurch

$$a + bx + cx^2 = a + bu - \frac{b^2}{2c} + cu^2 - bu + \frac{b^2}{4c}$$

$$= a - \frac{b^2}{4c} + cu^2$$

und $dx = du$.

Also, wenn man $a - \frac{b^2}{4c} = A$ setzt,

$$dy = \frac{du}{A + cu^2}$$

$$= \frac{1}{A} \cdot \frac{du}{1 + \frac{c}{A} \cdot u^2} \cdot (♁)$$

Man setze $\frac{c}{A} u^2 = v^2$,

also $\sqrt{\frac{c}{A}} \cdot u = v$

$$du = \sqrt{\frac{A}{c}} \cdot dv.$$

Durch Substitution dieser Werthe in (♁) erhält man

$$dy = \frac{1}{A} \cdot \sqrt{\frac{A}{c}} \cdot \frac{dv}{1 + v^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{Ac}} \cdot \frac{dv}{1 + v^2}.$$

Hieraus ergibt sich

$$y = \sqrt{\frac{1}{Ac}} \cdot \text{arc. Tg } v,$$

und hieraus, wenn man gehörig substituirt,

$$y = \sqrt{\frac{1}{Ac}} \cdot \text{arc. Tg } u \cdot \sqrt{\frac{c}{A}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{Ac}} \cdot \text{arc. Tg} \left(x + \frac{b}{2c}\right) \cdot \sqrt{\frac{c}{A}}.$$

§. 262. Da man das Differential einer Funktion von x, welche aus mehreren durch das Additions- oder Subtraktionszeichen verbundenen Gliedern besteht, erhält, wenn man das Differential von jedem Gliede nimmt und die erhaltenen Differentiale mit den gehörigen Vorzeichen aneinander reiht, so findet man umgekehrt das Integral eines Differentials, welches aus mehreren durch das Additions- oder Subtraktionszeichen verknüpften Gliedern zusammengesetzt ist, wenn man das Integral von einem jeden Gliede sucht und die erhaltenen Integrale durch die erforderlichen Vorzeichen mit einander verbindet.

Ex. Es ist

$$\int (ax^m + bx^n + cx^q + fx^r)\, dx$$

$= \int (ax^m dx + bx^n dx + cx^q dx + fx^r dx)$
$= \frac{ax^{m+1}}{m+1} + \frac{bx^{n+1}}{n+1} + \frac{cx^{q+1}}{q+1} + \frac{fx^{r+1}}{r+1} + C.$

Ist $m = -1$, so wird das Glied $\frac{ax^{m+1}}{m+1} = a \cdot \frac{x^{-1+1}}{-1+1}$ $= a \cdot \frac{x^0}{0} = a \cdot \frac{1}{0}$. Das Glied $\frac{a \cdot x^{m+1}}{m+1}$ ist aus dem Differential $ax^m dx$ entsprungen. Ist aber in dem Differential $ax^m dx$ das $m = -1$, so hat man $\int ax^m dx = \int ax^{-1} dx = \int a \cdot \frac{dx}{x}$ $= a \cdot \lg x$.

Daß diese Erörterungen auch ihre Anwendung finden, wenn n, oder q, u. s. w. $= -1$ ist, bedarf keiner Erwähnung.

§. 263. Aufg. Ein Differential $dy = P dx$ zu integriren, wenn P eine ganze rationale Funktion von x ist.

Aufl. Kommen in P angedeutete Multiplicationen vor, so vollziehe man dieselben. Man bekommt hierdurch für P eine endliche Reihe von der Form $Ax^m + Bx^n + Cx^p + \ldots$, in welcher $A, B, C, \ldots$ bestimmte Coefficienten sind. Multiplicirt man diese Reihe mit dx, so erhält man

$$dy = Ax^m dx + Bx^n dx + Cx^p dx + \ldots,$$

d. i. einen Ausdruck, der sich nach dem vorhergehenden §. integriren läßt.

Ex. 1. Es sey $dy = (a + bx + cx^2) \cdot x^3 dx$.

Durch Befolgung der gegebenen Vorschrift erhält man

$$dy = ax^3 dx + bx^4 dx + cx^5 dx,$$

$$\text{und } y = a \cdot \frac{x^4}{4} + b \cdot \frac{x^5}{5} + c \cdot \frac{x^6}{6} + C.$$

Ex. 2. Es sey $dy = x^m (a + bx^n)^p \cdot dx$, und p eine bejahte ganze Zahl. Die Größe $(a + bx^n)^p$ läßt sich in eine endliche Reihe entwickeln und diese Reihe, mit $x^m dx$ multiplicirt, kann nach den bisherigen Vorschriften integrirt werden.

§. 264. Ist $dy = (a + bx)^n . dx$, so ist es nicht nöthig, daß man $(a + bx)^n$ in eine Reihe auflöse, um das Integral von $(a + bx)^n . dx$ zu finden. Man findet es auf folgende Art kürzer. Es sey

$$a + bx = z.$$

Also $(a + bx)^n = z^n$

$$x = \frac{z - a}{b}$$

$$dx = \frac{dz}{b}$$

$$dy = \frac{1}{b} . z^n . dz$$

und $y = \frac{1}{b . (n + 1)} . z^{n+1} + C$

oder $y = \frac{(a + bx)^{n+1}}{b . (n + 1)} + C.$

In diesem Falle kann n auch eine andere, als eine bejahte ganze Zahl seyn, ohne, daß solches an den gemachten Schlüssen etwas ändert.

Das Differential $dy = (a + bx^n)^m . x^{n-1} . dx$ läßt sich auf eine ähnliche Weise integriren, m mag bedeuten, welche Zahl man will. Man setze nämlich

$$a + bx^n = z.$$

Also $(a + bx^n)^m = z^m$

$$x^n = \frac{z - a}{b}$$

$$x^{n-1} . dx = \frac{dz}{bn},$$

so ist $dy = \frac{z^m . dz}{bn}$

und $y = \frac{z^{m+1}}{b . n . (m + 1)} + C$

oder $y = \frac{(a + bx^n)^{m+1}}{b . n . (m + 1)} + C.$

§. 265. **Aufg.** Das Differential $dy = P . dx$ zu integriren, wenn P eine gebrochene rationale Funktion von x ist.

Aufl. Das Differential sey

$$\frac{(a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots + px^{n-1})dx}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \ldots + \pi x^n},$$

wo der in dx multiplicirte Bruch P ist. Der Zähler des Bruchs P, der auf seine kleinste Benennung gebracht sey, ist von einem niedrigern Grad, als der Nenner. Wäre er es nicht, so könnte man den Bruch P in zwei Theile zerlegen, von denen der eine eine ganze Funktion von x, oder eine bestimmte Größe wäre und der andere ein Bruch, in welchem die veränderliche Größe im Zähler nicht auf einen so hohen Grad stiege, als im Nenner. Man dürfte nur den Zähler durch den Nenner, beide nach der veränderlichen Größe ordnend und hierbei den Anfang mit den höchsten Potenzen derselben machend, so lange dividiren, bis man auf einen Rest käme, in welchem die veränderliche Größe weniger Abmessungen hätte, als im Nenner, und zu der erhaltenen ganzen Funktion oder bestimmten Größe einen Bruch setzen, dessen Zähler der bemerkte Rest und dessen Nenner der Nenner wäre, durch welchen man dividirt hätte. Die ganze Funktion oder bestimmte Größe, mit dx multiplicirt, würde ein Differential geben, das sich nach den vorhergehenden Vorschriften integriren ließe; der Bruch aber, der ebenfalls mit dx multiplicirt werden müßte, hätte im Zähler weniger Abmessungen, als im Nenner. Wäre z. B. gegeben $\frac{(1 + x^4)\,dx}{x - x^3}$, so erhielt man

$$\frac{(1 + x^4)\,dx}{x - x^3} = (-x + \frac{1 + x^2}{x - x^3})\,dx = -x\,dx + \frac{(1 + x^2)dx}{x - x^3}.$$

Man braucht also hier nur ein Differential P dx zu betrachten, in welchem P einen Bruch bedeutet, dessen Zähler von einem niedrigern Grade ist, als der Nenner, und der ein **echter Bruch** heißen mag.

§. 266. Die zwei Brüche $\frac{2}{x+1}$ und $\frac{3}{x-3}$ geben, addirt, die Funktion $\frac{5x-3}{x^2-4x+3}$. Hätte man also das Differential $\frac{(5x-3)\,dx}{x^2-4x+3}$ zu integriren, so sieht man, daß man durch Zerlegung des Bruchs $\frac{5x-3}{x^2-4x+3}$ in $\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-3}$ ein Differential $\left(\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-3}\right).dx = \frac{2.dx}{x+1}+\frac{3.dx}{x-3}$ erhält, welches nach den Formeln (§. 260.) integrirt werden kann.

§. 267. Die Zerlegung eines rationalen echten Bruchs in Brüche, deren Summe dem gegebenen gleich ist, in Partial-Brüche, ist für die Integral-Rechnung von Wichtigkeit. Sie soll deßhalb im Folgenden abgehandelt werden.

§. 268. Lehrs. Läßt sich der Bruch $\frac{A}{B}$, dessen Zähler und Nenner rationale ganze Funktionen von x sind, die kein gemeinschaftliches Maaß haben, in $\frac{P}{V}+\frac{Q}{W}$ zerlegen und ist $B = V.W$, so können auch V und W kein gemeinschaftliches Maaß haben.

Bew. Aus $\frac{A}{B} = \frac{P}{V}+\frac{Q}{W}$

folgt $\frac{A}{B} = \frac{PW+QV}{V.W}$

und hieraus, weil $B = VW$ ist,

$A = PW + QV$.

Nimmt man nun an, daß die Funktionen V und W ein gemeinschaftliches Maaß M haben, so ist M auch ein Maaß für A. Nun ist auch M ein Maaß für B. Also wäre M ein Maaß für A und B, was gegen die Voraussetzung ist.

§. 269. Lehrs. Die Summe

$$\frac{a+bx+cx^2+..+kx^{n-1}}{\alpha+\beta x+\gamma x^2+..+\varkappa x^n}+\frac{l+mx+nx^2+..+px^{r-1}}{\lambda+\mu x+\nu x^2+..+\pi x^r}$$

zweier rationalen echten Brüche ist ein echter Bruch.

Bew. Bringt man die beiden Brüche unter Eine Benennung, so erhält man

$$\frac{(a+bx+..+kx^{n-1})(\lambda+\mu x+..+\pi x^r)+(l+mx+..+px^{r-1})(\alpha+\beta x+..+\kappa x^n)}{(\alpha+\beta x+\gamma x^2+..+\kappa x^n)(\lambda+\mu x+\nu x^2+..+\pi x^r)}$$

Nach der Vollziehung der angezeigten Multiplicationen steigt die unbekannte Größe im Zähler dieses Bruchs bis zur Abmessung $n+r-1$, und im Nenner bis zur Abmessung $n+r$.

§. 270. **Lehrsatz.** Eine rationale echte gebrochene Funktion, deren Nenner sich in zwei Faktoren zerfällen läßt, die keinen gemeinschaftlichen Faktor haben, läßt sich in zwei rationale echte gebrochene Funktionen zerlegen, deren eine den einen und die andere den andern dieser Faktoren zum Nenner hat.

Beweis. Die gegebene Funktion sey

$$\frac{a+bx+cx^2+..+kx^m}{(\alpha+\beta x+\gamma x^2+..+\kappa x^n)(\lambda+\mu x+\nu x^2+..+\pi x^r)}.$$

Der höchste Werth, den hier m haben kann, ist $n+r-1$.

Man setze, es sey

$$\frac{a+bx+cx^2+..+kx^m}{(\alpha+\beta x+\gamma x^2+..+\kappa x^n)(\lambda x+\mu x+\nu x^2+..+\pi x^r)}=$$
$$\frac{a+bx+cx^2+..+kx^{n-1}}{\alpha+\beta x+\gamma x^2+..+\kappa x^n}+\frac{l+mx+nx^2+..+px^{r-1}}{\lambda+\mu x+\nu x^2+..+\pi x^r}.$$

Hätte einer von den angenommenen Partialbrüchen im Zähler nicht weniger Abmessungen, als im Nenner, so ließe er sich in eine ganze Funktion oder eine bestimmte Größe und in einen echten Bruch zerlegen und die Summe der angenommenen Partialbrüche könnte also der gegebenen Funktion nicht gleich seyn. Also kann die veränderliche Größe im Zähler eines Partialbruches nicht so viel Abmessungen haben, als im Nenner. Die veränderliche Größe im Zähler des ersten Partialbruches darf also höchstens $n-1$, und die im Zähler des zweiten höchstens $r-1$ Abmessungen haben.

Die in den Zählern der Partialbrüche vorkommenden deutschen Buchstaben bedeuten unbestimmte Coefficienten, und es kommt nun darauf an, nachzuweisen, daß sich dieselben aus der angenommenen Gleichung bestimmen lassen.

Man bringe die beiden Partialbrüche unter einerlei Benennung. Man bekommt so

$$\frac{a + bx + cx^2 + .. + kx^m}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + .. + \varkappa x^n).(\lambda + \mu x + \nu x^2 + .. + \pi x^r)} =$$
$$\frac{(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}x+..+\mathfrak{f}x^{n-1})(\lambda+\mu x+..+\pi x^r)+(\mathfrak{l}+\mathfrak{m}x+..+\mathfrak{p}x^{r-1})(\alpha+\beta x+..+\varkappa x^n)}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + .. + \varkappa x^n)(\lambda + \mu x + \nu x^2 + .. + \pi x^r)}$$

Also ist

$$a + bx + cx^2 + .. + kx^m =$$
$$(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}x+..+\mathfrak{f}x^{n-1})(\lambda+\mu x+..+\pi x^r)+(\mathfrak{l}+\mathfrak{m}x+..+\mathfrak{p}x^{r-1})(\alpha+\beta x+..+\varkappa x^n)$$

Die letzte Seite dieser Gleichung ist die Summe zweier Produkte, in deren jedem die Größe x höchstens $n + r - 1$ Abmessungen hat. In der Summe dieser Produkte hat also x auch höchstens $n + r - 1$ Abmessungen. Auch ist m höchstens $n + r - 1$.

Die Summe der Produkte hat höchstens $n + r$ Glieder, also auch höchstens so viel Coefficienten.

In diesen Coefficienten ist eine unbekannte Größe weder in eine andere, noch eine in sich selbst multiplicirt. Die unbekannten Größen sind bloß in bekannte multiplicirt. So sind z. B. die unbekannten Größen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots \mathfrak{f}$ der Reihe nach multiplicirt erst mit λ, dann mit $\mu, \ldots$ endlich mit π; ferner die unbekannten Größen $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \ldots \mathfrak{p}$ erst mit α, dann mit $\beta, \ldots$ endlich mit $\varkappa$.

Die linke Seite hat auch höchstens $n + r$ Coefficienten, und die sind alle bestimmt.

Endlich hat $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}x + \mathfrak{c}x^2 + .. + \mathfrak{f}x^{n-1}$ höchstens n unbekannte Größen, und $\mathfrak{l} + \mathfrak{m}x + \mathfrak{n}x^2 + .. + \mathfrak{p}x^{r-1}$ höchstens r. Die Zahl der unbestimmten Coefficienten ist also $n + r$.

Setzt man also die Coefficienten in der Summe der Produkte den Coefficienten $a, b, c, \ldots k$ auf der linken Seite der Glei-

chung, so wie sie in einerlei Potenzen von x multiplicirt sind, gleich, so erhält man höchstens $n + r$ Gleichungen. Eben so viel unbekannte Größen sind aber auch höchstens zu bestimmen, und sie werden, da weder eine unbekannte Größe in eine andere, noch in sich selbst multiplicirt vorkommt, aus einfachen Gleichungen bestimmt.

Coefficienten auf der linken Seite der Gleichung können $= 0$ seyn, d. h., es können auf dieser Seite Glieder fehlen. Alsdann ist das zugehörige Glied aus der Summe $= 0$.

§. 271. Hat man die Funktion in §. 270. in zwei Partialbrüche zerlegt, so kann man jeden derselben, dessen Nenner sich in zwei Faktoren zerlegen läßt, die kein gemeinschaftliches Maaß haben, wieder in zwei Partialbrüche zerlegen.

§. 272. Nach algebraischen Gründen läßt sich

$$A + Bx + Cx^2 + \ldots + Rx^{n-1} + Sx^n = 0,$$

als ein Produkt aus n Faktoren von der Form $p - qx$ betrachten, wo denn x eine bestimmte Menge von Werthen hat. Also läßt sich auch die Funktion

$$A + Bx + Cx^2 + \ldots + Rx^{n-1} + Sx^n$$

als ein Produkt von n Faktoren von der Form $p - qx$ ansehen. Dem x kommt hier jeder beliebige Werth zu. Das n ist eine bejahte ganze Zahl. Unter den Faktoren von der Form $p - qx$ können gleiche und unmögliche vorkommen.

§. 273. Jede Funktion, wie die in §. 270., läßt sich in so viel Brüche von der Form $\frac{A}{p - qx}$, wo A eine bestimmte Zahl bedeutet, zerlegen, so viel einfache ungleiche Faktoren von der Form $p - qx$ ihr Nenner hat.

§. 274. Aufg. Man soll aus dem gegebenen **einfachen Faktor** $p - qx$ des Nenners N einer rationalen echten gebrochenen Funktion den Zähler A des **einfachen Bruches** $\frac{A}{p - qx}$, der zu diesem Faktor gehört, finden.

Aufl. Es sey

$$N = (p - qx) \cdot S,$$

wo S eine ganze Funktion von x bedeutet.

Der Faktor S gebe bei der Zerlegung einen Bruch, dessen Zähler die ganze Funktion oder die bestimmte Größe P ist. Nennt man nun den Bruch, der zerlegt werden soll, $\frac{M}{N}$, so ist

$$\frac{M}{N} = \frac{A}{p - qx} + \frac{P}{S} = \frac{M}{(p - qx) S},$$

$$\text{also } \frac{P}{S} = \frac{M}{(p - qx) \cdot S} - \frac{A}{p - qx}$$

$$= \frac{M - AS}{(p - qx) \cdot S}.$$

$$\text{Folglich } P = \frac{M - AS}{p - qx}.$$

Da P eine ganze Funktion oder eine bestimmte Größe ist, so muß sich $M - AS$ durch $p - qx$ ohne Rest dividiren lassen, oder $p - qx$ muß ein Faktor von $M - AS$ seyn.

Wird dieser Faktor in $M - AS$ gleich 0, d. i. setzt man in M und S in dem Ausdruck $M - AS$ statt x die Größe $\frac{p}{q}$, so wird $M - AS = 0$, und

$$A = \frac{M}{S}.$$

Man findet also A, wenn man in M und S statt x die Größe $\frac{p}{q}$ setzt, und M durch S dividirt.

§. 275. Sucht man nach dem in §. 274. gefundenen Verfahren für alle Denominalfaktoren von der Form $p - qx$, die hier als alle unter einander verschieden angenommen werden, die Zähler, so erhält man alle einfachen Brüche, deren Summe $\frac{M}{N}$ ist.

Ex. Es sey $\frac{M}{N} = \frac{1 + x^2}{x - x^3} = \frac{1 + x^2}{x(1 - x^2)} = \frac{1 + x^2}{x(1 + x)(1 - x)}$.

Hier ist $M = 1 + x^2$

$$N = x(1 + x)(1 - x).$$

I. Der Faktor $p - qx$ sey $= x$, also $p = 0$, $q = -1$, $x = \frac{p}{q} = 0$, $S = 1 - x^2$. Man erhält hieraus, wenn man den Werth des $\frac{p}{q}$ für x in M und S schreibt, $\frac{M}{S} = \frac{1}{1} = 1 = A$.

II. Der Faktor $p - qx$ sey $= 1 + x$, also $p = 1$, $q = -1$, $x = \frac{p}{q} = -1$, $S = x - x^2$. Hieraus ergibt sich, wenn man den Werth des $\frac{p}{q}$ für x in M und S setzt, $\frac{M}{S} = \frac{2}{-2} = -1 = A$.

III. Der Faktor $p - qx$ sey $= 1 - x$. Man findet hieraus $\frac{M}{S} = \frac{2}{2} = 1$.

Also ist $\frac{1 + x^2}{x - x^3} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1 + x} + \frac{1}{1 - x}$.

§ 276. Sollte man also $\frac{(1 + x^2)\,dx}{x - x^3}$ integriren, so würde man setzen können

$$\frac{(1 + x^2)\,dx}{x - x^3} = \frac{dx}{x} - \frac{dx}{1 + x} + \frac{dx}{1 - x}.$$

Hieraus ergäbe sich

$$\int \frac{(1 + x^2)\,dx}{x - x^3} = \lg x - \lg(1 + x) - \lg(1 - x) + C \quad (§. 260.)$$

§. 277. Läßt sich des Bruches

$$\frac{A + Bx + Cx^2 + \ldots + Rx^{n-1}}{A' + B'x + C'x^2 + \ldots + R'x^{n-1} + S'x^n}$$

Nenner in die unter einander verschiedenen einfachen Faktoren $a - bx$, $a' - b'x$, $a'' - b''x$, ... zerlegen und heißen die zu diesen Faktoren gehörigen Zähler der Partialbrüche $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, ..., so ist

$$\frac{(A + Bx + Cx^2 + \ldots + Rx^{n-1})\,.\,dx}{A' + B'x + C'x^2 + \ldots + R'x^{n-1} + S'x^n} =$$

$$\frac{\mathfrak{A}\,dx}{a - bx} + \frac{\mathfrak{B}\,dx}{a' - b'x} + \frac{\mathfrak{C}\,dx}{a'' - b''x} + \ldots$$

Setzt man hier $a - bx = z$,

so ist $-b\,.\,dx = dz$

$$dx = -\frac{1}{b} \cdot dz$$

$$\frac{\mathfrak{A}\,dx}{a-bx} = -\frac{\mathfrak{A}}{b} \cdot \frac{dz}{z}$$

$$\text{und} \int \frac{\mathfrak{A} \cdot dx}{a-bx} = -\frac{\mathfrak{A}}{b} \cdot \lg z$$

$$= -\frac{\mathfrak{A}}{b} \cdot \lg(a-bx).$$

Man findet dies auch leicht aus §. 260. VII. Denn es ist

$$\frac{\mathfrak{A}\,dx}{a-bx} = \frac{\mathfrak{A} \cdot b \cdot dx}{b\,(a-bx)}.$$

$$\text{Folglich} \int \frac{\mathfrak{A}\,dx}{a-bx} = -\frac{1}{b} \lg(a-bx)^{\mathfrak{A}}$$

$$= -\frac{\mathfrak{A}}{b} \cdot \lg(a-bx).$$

Man hat also

$$\int \frac{(A + Bx + Cx^2 + \ldots + Rx^{n-1})\,dx}{A' + B'x + C'x^2 + \ldots + R'x^{n-1} + S'x^n} =$$

$$-\frac{\mathfrak{A}}{b} \cdot \lg(a-bx) - \frac{\mathfrak{B}}{b'} \lg(a'-b'x) - \frac{\mathfrak{C}}{b''} \cdot \lg(a''-b''x) - \ldots + C.$$

§. 278. **Lehrs.** Eine rationale gebrochene Funktion $\frac{P}{(p-qx)^n}$, deren Zähler P eine ganze Funktion ist, und weniger Abmessungen hat, als der Nenner, läßt sich zerlegen in die Partialbrüche $\frac{A}{(p-qx)^n} + \frac{B}{(p-qx)^{n-1}} + \frac{C}{(p-qx)^{n-2}} + \ldots + \frac{K}{p-qx}$, deren Anzahl n ist und deren Zähler alle unveränderliche Größen sind.

Bew. Da die veränderliche Größe in P höchstens auf den Grad $n-1$ steigen darf, so setze man

$$P = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots + \varkappa x^{n-1}.$$

Hier bedeuten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \varkappa$ gegebene Coefficienten. Ihre Anzahl ist n.

Man bringe die Partialbrüche, deren Summe der gegebenen Funktion gleich seyn soll, unter eine Benennung. Man erhält hierdurch

$$\frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots + \varkappa x^{n-1}}{(p - qx)^n} =$$

$$\frac{A + B(p - qx) + C(p - qx)^2 + \ldots + K(p - qx)^{n-1}}{(p - qx)^n}.$$

Folglich ist

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots + \varkappa x^{n-1} =$$

$$A + B(p - qx) + C(p - qx)^2 + \ldots + K(p - qx)^{n-1}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung gibt entwickelt eine Funktion von x, die $n - 1$ Abmessungen hat, also eben so viel Abmessungen, als die Funktion auf der linken Seite, und keiner von den unbekannten Coefficienten $A, B, \ldots$ auf der rechten Seite kommt mit einem andern, oder mit sich selbst multiplicirt vor.

Setzt man also die Coefficienten, so wie sie zu einerlei Potenzen von x auf beiden Seiten der Gleichung gehören, gleich, so erhält man n einfache Gleichungen, aus welchen sich die Coefficienten $A, B, C, \ldots, n$ an der Zahl, bestimmen lassen.

Glieder auf der linken Seite der Gleichung, d. i. im Zähler der gegebenen Funktion können fehlen, d. i. die Coefficienten derselben können $= 0$ seyn. Alsdann sind die entsprechenden Coefficienten auf der rechten Seite der Gleichung $= 0$ zu setzen.

Ex. Man soll $\frac{1 + x^2}{(1 + x)^3}$ in Partialbrüche zerlegen.

Man setze

$$\frac{1 + x^2}{(1 + x)^3} = \frac{A}{(1 + x)^3} + \frac{B}{(1 + x)^2} + \frac{C}{1 + x}.$$

Hieraus ergibt sich

$$1 + x^2 = A + B(1 + x) + C(1 + x)^2$$

$$= \left\{ \begin{array}{l|l} A & \\ B + B & x \\ C + 2C & + Cx^2. \end{array} \right.$$

Also ist

1) $A + B + C = 1$

2) $B + 2C = 0$

3) $C = 1.$

Folglich $B = -2,$

und $A = +2.$

Also ist

$$\frac{1 + x^2}{(1 + x)^3} = \frac{2}{(1 + x)^3} - \frac{2}{(1 + x)^2} + \frac{1}{1 + x}.$$

§. 279. Um das Differential $\frac{(1 + x^2)\,dx}{(1 + x)^3}$ zu integriren, darf man also nur setzen

$$\frac{(1 + x^2)\,dx}{(1 + x)^3} = \frac{2 \cdot dx}{(1 + x)^3} - \frac{2 \cdot dx}{(1 + x)^2} + \frac{dx}{1 + x}.$$

Nun ist nach §. 260. III.

$$\int \frac{2 \cdot dx}{(1 + x)^3} = 2 \cdot \int (1 + x)^{-3} \cdot dx = -\frac{1}{(1 + x)^2}$$

$$\int \frac{2 \cdot dx}{(1 + x)^2} = 2 \cdot \int (1 + x)^{-2} \cdot dx = -\frac{2}{1 + x}$$

und nach §. 260. VII.

$$\int \frac{dx}{1 + x} = \lg (1 + x).$$

Folglich ist

$$\int \frac{(1 + x)^2 \cdot dx}{(1 + x)^3} = -\frac{1}{(1 + x)^2} + \frac{2}{1 + x} + \lg (1 + x) + C$$

$$= \frac{1 + 2x}{(1 + x)^2} + \lg (1 + x) + C.$$

§. 280. Aufg. Wenn in der rationalen echten gebrochenen Funktion $\frac{M}{N}$ der Nenner $N = (p - qx)^n . X$ ist und $(p - qx)^n$ und X kein gemeinschaftliches Maaß haben, die Zähler der Partialbrüche zu

finden, in welche sich $\frac{M}{N}$ zerlegen läßt. X ist eine Funktion von x.

Aufl. Nach §. 270. und §. 278. kann man setzen

$$\frac{M}{(p-qx)^n.X}=\frac{A}{(p-qx)^n}+\frac{B}{(p-qx)^{n-1}}+\frac{C}{(p-qx)^{n-2}}+..+\frac{K}{p-qx}+\frac{L}{X}$$

$$=\frac{AX+BX.(p-qx)+CX(p-qx)^2+..+KX.(p-qx)^{n-1}+L(p-qx)^n}{(p-qx)^n.X}$$

Also ist

$$\frac{M-AX-BX(p-qx)-CX(p-qx)^2-..-K.X(p-qx)^{n-1}}{(p-qx)^n}=L, (\odot)$$

wo L eine ganze Funktion von x bedeutet.

Da L eine ganze Funktion ist, so muß sich der Zähler des Bruchs auf der linken Seite dieser Gleichung, der Y heißen soll, durch $(p-qx)^n$ ohne Rest dividiren lassen.

Also muß sich Y auch durch $p-qx$ ohne Rest dividiren lassen. Nun lassen sich aber alle Glieder, die nach $M-AX$ folgen, offenbar durch $p-qx$ ohne Rest dividiren. Also muß sich auch $M-AX$ durch $p-qx$ ohne Rest dividiren lassen. Also wird $M-AX=0$, wenn man darin $p-qx=0$ oder $x=\frac{p}{q}$ setzt.

Man findet also aus

$$A=\frac{M}{X}$$

das A, wenn man in M und X das $x=\frac{p}{q}$ setzt.

Aus der Gleichung ($\odot$) ergibt sich

$$\frac{\frac{M-AX}{p-qx}-BX-CX(p-qx)-..-KX(p-qx)^{n-2}}{(p-qx)^{n-1}}=L.$$

Nun ist $\frac{M-AX}{p-qx}$ eine ganze Funktion von x. Setzt man diese $=P$, so hat man

$$\frac{P-BX-CX(p-qx)-..-KX(p-qx)^{n-2}}{(p-qx)^{n-1}}=L\ (♀.)$$

Hieraus ergibt sich nach Schlüssen, die den zur Bestimmung des A gemachten gleich sind, daß man aus

$$B = \frac{P}{X}$$

das B findet, wenn man in P und X statt x, $\frac{p}{q}$ setzt.

Aus (♀) erhält man, wenn man $\frac{P - BX}{p - qx} = Q$ setzt, wo Q eine ganze Funktion von x ist,

$$\frac{Q - CX - \ldots - KX\,(p - qx)^{n-3}}{(p - qx)^{n-2}} = L$$

u. s. w.

Ex. Den Bruch $\frac{1 + x^2}{x^5\,(1 + x^3)}$ in Partialbrüche zu zerlegen.

Hier ist

$M = 1 + x^2$

$X = 1 + x^3$

$p - qx = x,\ p = 0,\ q = -1,\ \frac{p}{q} = 0,\ n = 5.$

Also $A = \frac{M}{X} = \frac{1 + x^2}{1 + x^3} = 1.$

Ferner ist

$$P = \frac{M - AX}{p - qx} = \frac{1 + x^2 - 1 - x^3}{x} = x - x^2$$

und $B = \frac{P}{X} = \frac{x - x^2}{1 + x^3} = 0.$

Ferner

$$Q = \frac{P - BX}{p - qx} = \frac{x - x^2}{x} = 1 - x$$

und $C = \frac{Q}{X} = \frac{1 - x}{1 + x^3} = 1.$

Ferner

$$R = \frac{Q - CX}{p - qx} = \frac{1 - x - 1 - x^3}{x} = -1 - x^2$$

und $D = \frac{R}{X} = \frac{-1 - x^2}{1 + x^3} = -1.$

Ferner

$$S = \frac{R - DX}{p - qx} = \frac{-1 - x^2 + 1 + x^3}{x} = -x + x^2$$

und $E = \frac{S}{X} = \frac{-x + x^2}{1 + x^3} = 0.$

Endlich ist

$$L = \frac{1 + x^2 - 1 - x^3 - (1 + x^3)x^2 + (1 + x^3)x^3}{x^5}$$

$$= \frac{1 + x^2 - 1 - x^3 - x^2 - x^5 + x^3 + x^6}{x^5}$$

$$= \frac{-x^5 + x^6}{x^5} = -1 + x.$$

Man hat also

$$\frac{1 + x^2}{x^5(1 + x^3)} = \frac{1}{x^5} + \frac{0}{x^4} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} + \frac{0}{x} - \frac{(1 - x)}{1 + x^3}.$$

Hier müßte nun noch $\frac{1 - x}{1 + x^3}$ zerlegt werden. Die einfachen Faktoren von $1 + x^3$ sind $1 + x$, $x - (\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4}})$, $x - (\frac{1}{2} - \sqrt{-\frac{3}{4}})$. Die Zerlegung kann nach §. 274. bewerkstelliget werden. Von den drei Partialbrüchen, die man erhalten würde, haben die zwei letzten unmögliche Größen zu Nennern. Um keine unmöglichen Größen zu bekommen, zerlegt man den Bruch $\frac{1 - x}{1 + x^3}$ in zwei Partialbrüche, von denen der eine eine quadratische Größe zum Nenner hat.

Es ist nämlich $\frac{1 - x}{1 + x^3} = \frac{1 - x}{(1 + x)(1 - x + x^2)}$, wo die Faktoren, in welche der Nenner zerlegt ist, kein gemeinschaftliches Maaß haben.

Nach §. 270. kann man also setzen

$$\frac{1 - x}{1 + x^3} = \frac{A}{1 + x} + \frac{A' + B'x}{1 - x + x^2}.$$

Hieraus folgt

$$1 - x = \begin{array}{l|l|l} A - A & x + A & x^2 \\ + A' + A' & + B' & \\ + B' & & \end{array}$$

Man hat also die drei Gleichungen

1) $A + A' = 1$

2) $- A + A' + B' = - 1$

3) $A + B' = 0$.

Aus ihnen ergibt sich

$$A = \tfrac{2}{3},\ A' = \tfrac{1}{3},\ B' = -\tfrac{2}{3}.$$

Folglich ist

$$\frac{1 - x}{1 + x^3} = \frac{\frac{2}{3}}{1 + x} + \frac{\frac{1}{3} - \frac{2}{3}x}{1 - x + x^2}.$$

Also endlich

$$\frac{1 + x^2}{x^5 \cdot (1 + x^3)} = \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} - \frac{\frac{2}{3}}{1 + x} - \frac{\frac{1}{3} - \frac{2}{3}x}{1 - x + x^2}.$$

§. 281. Soll nun gesucht werden das Integral von $\frac{(1 + x^2)\,dx}{x^5\,(1 + x^3)}$, so hat man

$$\frac{(1 + x^2)\,dx}{x^5\,(1 + x^3)} = \frac{dx}{x^5} + \frac{dx}{x^3} - \frac{dx}{x^2} - \frac{\frac{2}{3}dx}{1 + x} - \frac{(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}x)\,dx}{1 - x + x^2}.$$

Das Integral der vier ersten Glieder auf der rechten Seite dieser Gleichung läßt sich nach §. 260. finden. Das Integral von $\frac{(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}x)\,dx}{x^2 - x + 1}$ ergibt sich auf folgende Art.

Es ist

$$\frac{(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}x)\,dx}{x^2 - x + 1} = \frac{(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}x)\,dx}{x^2 - x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \frac{(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}x)\,dx}{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}.$$

Man setze $x - \frac{1}{2} = z$

also $x = \frac{1}{2} + z$

$dx = dz$.

Hierdurch wird

$$\frac{(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}x)\,dx}{x^2 - x + 1} = \frac{(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{2}{3}z)\,dz}{z^2 + \frac{3}{4}} = -\frac{\frac{2}{3}z\,dz}{z^2 + \frac{3}{4}}$$

$$= -\tfrac{2}{3} \cdot \frac{2 \cdot z \cdot dz}{2 \cdot (z^2 + \frac{3}{4})}.$$

Nun ist nach §. 260. IX.

$$\int \frac{2 \cdot z \cdot dz}{\frac{3}{4} + z^2} = \lg\,(\tfrac{3}{4} + z^2).$$

Also ist

$$\int \frac{(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}x)\,dx}{x^2 - x + 1} = -\tfrac{1}{3} . \lg (x^2 - x + 1).$$

§. 282. Aus algebraischen Gründen ist bekannt, daß, wenn die Gleichung

$$A + Bx + Cx^2 + .. + Rx^{n-1} + Sx^n = 0$$

einfache unmögliche Faktoren hat, sie solche immer paarweise von den Formen $x + p - q . \sqrt{-1}$, $x + p + q . \sqrt{-1}$ enthält und daß jedes zusammengehörige Paar einen möglichen quadratischen Faktor von der Form $x^2 + 2px + p^2 + q^2$ gibt. Erhält man also bei der Zerlegung der Funktion

$$A + Bx + Cx^2 + ... + Rx^{n-1} + Sx^n$$

in einfache Faktoren solche, die unmöglich sind, so kommen diese auch immer paarweise vor, haben die Formen $x + p - q . \sqrt{-1}$, $x + p + q . \sqrt{-1}$, und jedes zusammengehörige Paar gibt einen quadratischen Faktor von der Form $x^2 + 2px + p^2 + q^2$.

§. 283. Aufg. Die rationale echte gebrochene Funktion $\frac{M}{N}$ von x in Partialbrüche zu zerlegen, wenn $N = (x^2 + 2px + p^2 + q^2) . Q$ ist und die Faktoren $x^2 + 2px + p^2 + q^2$ und Q kein gemeinschaftliches Maaß haben. Q ist eine ganze Funktion von x.

Aufl. Man setze

$$\frac{M}{N} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2px + p^2 + q^2} + \frac{P}{Q},$$

wo P eine rationale ganze Funktion von x oder eine bestimmte Größe ist.

Es ergibt sich hieraus

$$M = Q . (Ax + B) + P (x^2 + 2px + p^2 + q^2)$$

und hieraus

$$P = \frac{M - Q . (Ax + B)}{x^2 + 2px + p^2 + q^2}.$$

Da nun P eine rationale ganze Funktion von x oder eine bestimmte Größe ist, so muß sich $M - Q.(Ax + B)$ durch $x^2 + 2px + p^2 + q^2$ und also auch durch $x + p - q.\sqrt{-1}$ und $x + p + q.\sqrt{-1}$ ohne Rest dividiren lassen (§. 282.). Also wird die Größe $M - Q.(Ax + B)$ zu Null, sowohl, wenn man in dieselbe $-p + q.\sqrt{-1}$, als auch, wenn man darein $-p - q.\sqrt{-1}$ statt x setzt.

Es ist, wenn n eine bejahte ganze Zahl bedeutet,

$$(-p+q.\sqrt{-1})^n = \pm p^n \mp np^{n-1}.q.\sqrt{-1} \mp \frac{n(n-1)}{1.2}.p^{n-2}q^2$$
$$\pm \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}.p^{n-3}.q^3.\sqrt{-1} \mp ..$$

$$\text{u. } (-p-q.\sqrt{-1})^n = \pm p^n \pm np^{n-1}.q.\sqrt{-1} \mp \frac{n(n-1)}{1.2}.p^{n-2}q^2$$
$$\mp \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}.p^{n-3}q^3.\sqrt{-1} \pm ..$$

Die obern Vorzeichen gelten, wenn n gerade, und die untern, wenn n ungrade ist.

Die Potenz $(-p + q.\sqrt{-1})^n$ kann also ausgedrückt werden durch eine Größe $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}.\sqrt{-1}$, die aus zwei Theilen besteht, aus einem möglichen $\mathfrak{A}$ und einem unmöglichen $\mathfrak{B}.\sqrt{-1}$. Die Potenz $(-p - q.\sqrt{-1})^n$ muß alsdann durch $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}.\sqrt{-1}$ dargestellt werden.

Nun setze man in M und Q in dem Ausdruck $M - Q(Ax + B)$ statt x die Größe $-p + q.\sqrt{-1}$. Was man so für M und Q erhält, kann allgemein durch

$$\mathfrak{M} + \mathfrak{M}'.\sqrt{-1}$$
$$\text{und } \mathfrak{Q} + \mathfrak{Q}'.\sqrt{-1}$$

ausgedrückt werden.

Man erhält also durch Setzung des Werthes $-p + q.\sqrt{-1}$ statt x in dem Ausdruck $M - Q.(Ax + B)$,

$$\mathfrak{M}+\mathfrak{M}'.\sqrt{-1}-(\mathfrak{Q}+\mathfrak{Q}'.\sqrt{-1})[A.(-p+q.\sqrt{-1})+B]$$
$$= \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{M} + \mathfrak{Q}pA + \mathfrak{Q}'qA - \mathfrak{Q}B \\ + \mathfrak{M}'.\sqrt{-1} - \mathfrak{Q}qA.\sqrt{-1} + \mathfrak{Q}'pA.\sqrt{-1} - \mathfrak{Q}'B.\sqrt{-1}. \end{array} \right.$$

Dieser Ausdruck ist $= 0$. Da er aber nicht anders $= 0$ seyn kann, als wenn sowohl der mögliche, als der unmögliche Theil, jeder für sich $= 0$ ist, so hat man die beiden Gleichungen

$$\mathfrak{M} + \mathfrak{Q}pA + \mathfrak{Q}'qA - \mathfrak{Q}B = 0$$

$$\text{und } \mathfrak{M}' - \mathfrak{Q}qA + \mathfrak{Q}'pA - \mathfrak{Q}'B = 0,$$

aus welchen sich A und B bestimmen läßt.

Man könnte in dem Ausdruck $M - Q(Ax + B)$ statt x auch $-p - q \cdot \sqrt{-1}$ setzen. Hierdurch erhielt man

für M, $\mathfrak{M} - \mathfrak{M}' \cdot \sqrt{-1}$

für Q, $\mathfrak{Q} - \mathfrak{Q}' \cdot \sqrt{-1}$.

Verführe man nun weiter, wie vorhin, so erhielt man die beiden vorigen Gleichungen, die zur Bestimmung des A und B dienen.

§. 284. Aufg. Man soll $\frac{(Ax + B) \cdot dx}{x^2 + 2px + p^2 + q^2}$ integriren.

Aufl. Es ist

$$\frac{(Ax + B) \cdot dx}{x^2 + 2px + p^2 + q^2} = \frac{(Ax + B) \cdot dx}{(x+p)^2 + q^2}.$$

Nun sey $x + p = y$, also $(x + p)^2 = y^2$, und $dx = dy$, so ist

$$\frac{(Ax + B)\,dx}{x^2+2px+p^2+q^2} = \frac{[A(y-p)+B]dy}{y^2 + q^2} = \frac{Ay \cdot dy}{y^2+q^2} + \frac{(B-Ap)\,dy}{y^2 + q^2}.$$

I. Nun ist, wenn man $y^2 + q^2 = u$, also $2y\,dy = du$, und $y \cdot dy = \frac{du}{2}$ setzt,

$$\int \frac{Ay \cdot dy}{y^2+q^2} = \frac{A}{2} \cdot \int \frac{du}{u} = \frac{A}{2} \cdot \lg u = \frac{A}{2} \cdot \lg(y^2 + q^2)$$

$$= \frac{A}{2} \cdot \lg(x^2 + 2px + p^2 + q^2).$$

II. Ferner ist

$$\int (B - Ap) \cdot \frac{dy}{y^2 + q^2} = \int (B - Ap) \cdot \frac{\frac{1}{q} \cdot \frac{dy}{q}}{\left(\frac{y}{q}\right)^2 + 1}$$

$$= \frac{B - Ap}{q} \cdot \int \frac{\frac{dy}{q}}{\left(\frac{y}{q}\right)^2 + 1} = \frac{B - Ap}{q} \cdot \text{arc. Tg} \frac{y}{q}$$

$$= \frac{(B - Ap)}{q} \cdot \text{arc. Tg} \frac{x + p}{q} \ (\S.\ 260.).$$

III. Man hat also

$$\int \frac{(Ax + B)\,dx}{x^2 + 2px + p^2 + q^2} = \begin{cases} \frac{A}{2} \cdot \lg(x^2 + 2px + p^2 + q^2) \\ + \frac{(B - Ap)}{q} \cdot \text{arc. Tg} \frac{x + p}{q}. \end{cases}$$

Ex. Es sey zu integriren $\frac{(x^2 + x - 1)\,dx}{(x + 1)(x^2 + x + \frac{17}{4})}$.

Hier ist $M = x^2 + x - 1$, $Q = x + 1$, und der Faktor $x^2 + x + \frac{17}{4}$ läßt sich in die beiden Faktoren $x + \frac{1}{2} - 2 \cdot \sqrt{-1}$, und $x + \frac{1}{2} + 2 \cdot \sqrt{-1}$ zerlegen. Man hat also in $M - Q \cdot (Ax + B)$, welches hier $= x^2 + x - 1 - (x + 1)(Ax + B) = x^2 + x - 1 - Ax^2 - Ax - Bx - B$ ist, statt x die Größe $-\frac{1}{2} + 2 \cdot \sqrt{-1}$ zu setzen.

Man erhält hierdurch die beiden Gleichungen

1) $-\frac{17}{4} - \frac{13}{4} \cdot A - \frac{1}{2}B = 0$

2) $-4 \cdot A - 2B = 0$.

Man findet aus denselben $A = -\frac{17}{5}$, $B = \frac{34}{5}$. Also ist

$$\frac{(x^2 + x - 1) \cdot dx}{(x + 1)(x^2 + x + \frac{17}{4})} = \left(\frac{-\frac{17}{5}x + \frac{34}{5}}{x^2 + x + \frac{17}{4}} + \frac{P}{x + 1}\right) \cdot dx.$$

Den Zähler P des Partialbruchs $\frac{P}{x + 1}$ findet man nach §. 274. $= -\frac{4}{17}$.

Also ist

$$\frac{(x^2 + x - 1) \cdot dx}{(x + 1)(x^2 + x + \frac{17}{4})} = \frac{(-\frac{17}{5}x + \frac{34}{5})\,dx}{x^2 + x + \frac{17}{4}} - \frac{\frac{4}{17} \cdot dx}{x + 1}.$$

Um nun das Integral von $\frac{(-\frac{17}{5}x + \frac{34}{5}) \cdot dx}{x^2 + x + \frac{17}{4}}$ zu finden, setze man das in III. befindliche $B = \frac{34}{5}$, $A = -\frac{17}{5}$, $p = \frac{1}{2}$, $q = 2$. Man bekommt hierdurch

$$\int \frac{(-\frac{17}{5}x + \frac{34}{5})dx}{x^2 + x + \frac{17}{4}} = -\tfrac{17}{10} \cdot \lg(x^2 + x + \tfrac{17}{4}) + \tfrac{85}{20} \cdot \text{arc. Tg} \frac{x + \frac{1}{2}}{2}.$$

Endlich ist nach §. 260. $\int \frac{4}{17} \cdot \frac{dx}{x+1} = \frac{4}{17} \cdot \lg(x+1)$.

Also

$$\int \frac{(x^2+x-1)\,dx}{(x+1)(x^2+x+\frac{17}{4})} = \tfrac{17}{4} \cdot \text{arc. Tg} \frac{x+\frac{1}{2}}{2} - \tfrac{17}{10} \cdot \lg(x^2+x+\tfrac{17}{4})$$
$$- \tfrac{4}{17} \cdot \lg(x+1) + C.$$

§. 285. Lehrs. Wenn der Bruch $\frac{M}{N}$ einen Nenner hat, der aus zwei gleichen Faktoren von der Form $x^2 + 2px + p^2 + q^2$ besteht und der sich also nicht in einfache mögliche Faktoren zerlegen läßt, so kann der Bruch in zwei Partialbrüche

$$\frac{Ax + B}{(x^2 + 2px + p^2 + q^2)^2} + \frac{A'x + B'}{x^2 + 2px + p^2 + q^2}$$

zerlegt werden.

Bew. Denn setzt man

$$\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{(x^2+2px+p^2+q^2)^2} = \frac{Ax+B}{(x^2+2px+p^2+q^2)^2} + \frac{A'x+B'}{x^2+2px+p^2+q^2}$$

so erhält man, alles unter einerlei Benennung gebracht,

$$\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{(x^2+2px+p^2+q^2)^2} = \frac{Ax+B+(A'x+B')(x^2+2px+p^2+q^2)}{(x^2+2px+p^2+q^2)^2}$$

oder

$$ax^3+bx^2+cx+d = Ax+B+(A'x+B')(x^2+2px+p^2+q^2)$$

und man sieht, daß man aus dieser Gleichung durch die gehörige Entwicklung vier Gleichungen zur Bestimmung der Größen A, B, A′, B′ herleiten kann.

§. 286. Eben so läßt sich zeigen, daß der Bruch

$$\frac{ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f}{(x^2 + 2px + p^2 + q^2)^3}$$

in die Partialbrüche

$$\frac{Ax + B}{(x^2+2px+p^2+q^2)^3} + \frac{A'x + B'}{(x^2+2px+p^2+q^2)^2} + \frac{A''x + B''}{x^2+2px+p^2+q^2}$$

zerlegt werden kann.

Ueberhaupt ist

$$\frac{M}{(x^2+2px+p^2+q^2)^n} = \frac{Ax+B}{(x^2+2px+p^2+q^2)^n} + \frac{A'x+B'}{(x^2+2px+p^2+q^2)^{n-1}}$$
$$+ \ldots + \frac{A^{\nu}x+B^{\nu}}{x^2+2px+p^2+q^2}.$$

§. 287. Aufg. Man soll $\frac{M}{(x^2+2px+p^2+q^2)^n \cdot Q}$ in Partialbrüche zerlegen.

Aufl. Setzt man der Kürze wegen $x^2+2px+p^2+q^2 = V$, so hat man

$$\frac{M}{V^n \cdot Q} = \frac{Ax+B}{V^n} + \frac{A'x+B'}{V^{n-1}} + \frac{A''x+B''}{V^{n-2}} + \ldots + \frac{P}{Q}$$
$$= \frac{Q(Ax+B)+Q(A'x+B')V+Q(A''x+B'')V^2+\ldots+PV^n}{V^n \cdot Q}$$

und $P = \frac{M-Q(Ax+B)-Q(A'x+B')V-Q(A''x+B'')V^2+\ldots}{V^n}$ $(\odot)$

Der Bruch auf der rechten Seite dieser Gleichung muß sich durch V^n, also auch durch V ohne Rest dividiren lassen. Also ist auch $M-Q(Ax+B)$ durch $x^2+2px+p^2+q^2$ theilbar. Folglich wird der Ausdruck $M-Q(Ax+B)$ gleich Null, wenn man in denselben $-p+q\cdot\sqrt{-1}$, oder $-p-q\cdot\sqrt{-1}$ statt x setzt. Die Größen A und B lassen sich also hier wie in §. 283. bestimmen.

Dividirt man den Zähler und Nenner des Bruchs in $(\odot)$ durch V und setzt $\frac{M-(Ax+B)\cdot Q}{V} = M'$, so erhält man

$$P = \frac{M'-Q(A'x+B')-Q(A''x+B'')V-\ldots}{V^{n-1}}.$$

Schlüsse, wie die vorhin gemachten, zeigen, daß $M'-Q(A'x+B')$ zu Null wird, wenn man wieder $-p+q\cdot\sqrt{-1}$, oder $-p-q\cdot\sqrt{-1}$ statt x setzt, und daß man auch A' und B' nach dem in §. 283. erörterten Verfahren finden kann, u. s. w.

§. 288. Aufg. Man soll

$$\frac{(Ax+B)\,dx}{(x^2+2px+p^2+q^2)^n} = \frac{(Ax+B)\,dx}{[(x+p)^2+q^2]^n}$$

integriren, wo n eine bejahte ganze Zahl bedeutet.

Aufl. Man setze $x+p=y$, also $x=y-p$, und $dx=dy$. Alsdann ist

$$\frac{(Ax+B)\,.\,dx}{(x^2+2px+p^2+q^2)^n} = \frac{(Ay-Ap+B)\,dy}{(y^2+q^2)^n} = \frac{Ay\,dy}{(y^2+q^2)^n}$$
$$+\frac{(B-Ap)dy}{(y^2+q^2)^n}.$$

I. Nun ist, wenn man $y^2+q^2=z$, also $2y\,.\,dy=dz$ und $y\,.\,dy=\frac{dz}{2}$ setzt,

$$\int\frac{Ay\,.\,dy}{(y^2+q^2)^n} = \frac{A}{2}\,.\int\frac{dz}{z^n} = \frac{A}{2}\,.\int z^{-n}\,.\,dz = \frac{A}{2}\,.\,\frac{z^{-n+1}}{-n+1}$$
$$= \frac{A}{2}\,.\,\frac{(y^2+q^2)^{-n+1}}{-n+1}.$$

II. Es ist also nun noch der Theil $\frac{(B-Ap)\,dy}{(y^2+q^2)^n}$ zu integriren. Der Kürze wegen setze man $B-Ap=C$. Hierdurch erhält man

$$\frac{(B-Ap)\,dy}{(y^2+q^2)^n} = \frac{C\,dy}{(y^2+q^2)^n} = C\,.\,(y^2+q^2)^{-n}\,.\,dy.$$

Es ist, r mag, welche Zahl man will, bedeuten,

$$(y^2+q^2)^r\,.\,dy = (y^2+q^2)^{r-1}\,.\,(y^2+q^2)\,.\,dy$$
$$= (y^2+q^2)^{r-1}\,.\,y^2dy + q^2(y^2+q^2)^{r-1}\,.\,dy$$
$$= \frac{y}{2}\,.(y^2+q^2)^{r-1}\,.\,2y\,dy + q^2(y^2+q^2)^{r-1}\,.\,dy$$

und

$$\int(y^2+q^2)^r\,.\,dy = \int\frac{y}{2}(y^2+q^2)^{r-1}.2ydy+q^2.\int(y^2+q^2)^{r-1}.dy.$$

Nun ist

$$d\frac{(y^2+q^2)^r}{r} = (y^2+q^2)^{r-1}\,.\,2y\,.\,dy.$$

Folglich

$$\int(y^2+q^2)^r\,.\,dy = \int\frac{y}{2}\,.\,d\frac{(y^2+q^2)^r}{r} + q^2.\int(y^2+q^2)^{r-1}.dy\;(\odot).$$

Nach §. 260. hat man, wenn u und v Funktionen von x bedeuten,

$$d(uv) = u \,.\, dv + v \,.\, du.$$

Also $uv = \int u \,.\, dv + \int v \,.\, du$

und $\int u \,.\, dv = uv - \int v \,.\, du.$

Man setze

$$u = \frac{y}{2},\ v = \frac{(y^2 + q^2)^r}{r}.$$

Hierdurch bekommt man

$$\int \frac{y}{2} \,.\, d\frac{(y^2 + q^2)^r}{r} = \frac{y}{2} \,.\, \frac{(y^2 + q^2)^r}{r} - \int \frac{(y^2 + q^2)^r}{r} \,.\, d\frac{y}{2}.$$

Aus dem hier Gefundenen und aus (⊙) ergibt sich

$$\int (y^2 + q^2)^r \,.\, dy = \frac{y}{2} \,.\, \frac{(y^2 + q^2)^r}{r} - \int \frac{(y^2 + q^2)^r}{r} \,.\, \frac{dy}{2} + q^2 \,.\, \int (y^2 + q^2)^{r-1} \,.\, dy.$$

Man findet hieraus

$$\frac{1+2r}{2r} \,.\, \int (y^2 + q^2)^r \,.\, dy = \frac{y}{2} \,.\, \frac{(y^2 + q^2)^r}{r} + q^2 \,.\, \int (y^2 + q^2)^{r-1} \,.\, dy$$

und hieraus

$$\int (y^2 + q^2)^{r-1} \,.\, dy = -\frac{y}{2 \,.\, rq^2} \,.\, (y^2 + q^2)^r + \frac{1+2r}{2rq^2} \,.\, \int (y^2 + q^2)^r \,.\, dy.$$

Man setze $r - 1 = -n$, also $r = -(n-1)$. Hierdurch erhält man endlich

$$\int (y^2 + q^2)^{-n} \,.\, dy = \frac{y}{(2n-2)q^2} \,.\, (y^2 + q^2)^{-(n-1)} + \frac{2n-3}{(2n-2)q^2} \,.\, \int (y^2 + q^2)^{-(n-1)} dy$$

oder

$$\int \frac{dy}{(y^2 + q^2)^n} = \frac{1}{(2n-2)q^2} \,.\, \frac{y}{(y^2 + q^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{(2n-2)q^2} \,.\, \int \frac{dy}{(y^2 + q^2)^{n-1}} \quad (♀).$$

Man setze $n - 1$ statt n. Man bekommt hierdurch

$$\int \frac{dy}{(y^2 + q^2)^{n-1}} = \frac{1}{(2n-4)q^2} \,.\, \frac{y}{(y^2 + q^2)^{n-2}} + \frac{2n-5}{(2n-4)q^2} \,.\, \int \frac{dy}{(y^2 + q^2)^{n-2}}.$$

Substituirt man den hier für $\frac{dy}{(y^2+q^2)^{n-1}}$ gefundenen Werth in (♀), so erhält man $\int\frac{dy}{(y^2+q^2)^n} =$

$$\frac{1}{(2n-2)q^2}\cdot\frac{y}{(y^2+q^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{(2n-2)(2n-4)q^4}\cdot\frac{y}{(y^2+q^2)^{n-2}}$$
$$+\frac{(2n-3)(2n-5)}{(2n-2)(2n-4)q^4}\cdot\int\frac{dy}{(y^2+q^2)^{n-2}}\ (♁).$$

Setzt man weiter $n-2$ statt n in (♀), so erhält man

$$\int\frac{dy}{(y^2+q^2)^{n-2}} = \frac{1}{(2n-6)q^2}\cdot\frac{y}{(y^2+q^2)^{n-3}} + \frac{2n-7}{(2n-6)q^2}\cdot\int\frac{dy}{(y^2+q^2)^{n-3}}.$$

Durch Substitution dieses Werthes in (♁) bekommt man

$$\int\frac{dy}{(y^2+q^2)^n} = \frac{1}{(2n-2)q^2}\cdot\frac{y}{(y^2+q^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{(2n-2)(2n-4)q^4}\cdot\frac{y}{(y^2+q^2)^{n-2}}$$
$$+\frac{(2n-3)(2n-5)}{(2n-2)(2n-4)(2n-6)q^6}\cdot\frac{y}{(y^2+q^2)^{n-3}}$$
$$+\frac{(2n-3)(2n-5)(2n-7)}{(2n-2)(2n-4)(2n-6)q^6}\cdot\int\frac{dy}{(y^2+q^2)^{n-3}}.$$

Man sieht wohl, daß durch jede weitere Anwendung der Formel (♀) die Potenz der noch unter dem Integrationszeichen stehenden Größe um einen Grad erniedrigt wird, und daß man so endlich auf das Differential $\frac{dy}{y^2+q^2}$ kommt, welches sich nach §. 284. integriren läßt.

§. 289. Aufg. Es sey X eine Funktion von x und $dy = c(a+X)^p \cdot dX$. Man soll dieses Differential integriren. Das p bedeutet jede beliebige Zahl.

Aufl. Man setze $a + X = u$,
also $dX = du$,

so erhält man

$$dy = c \cdot u^p \cdot du$$

$$\text{und } y = \frac{c \cdot u^{p+1}}{p+1}$$

$$= \frac{c \cdot (a+X)^{p+1}}{p+1}.$$

Ex. 1. Es sey $dy = \sqrt{(b^2 + x^2)} \,.\, 2x \,.\, dx$
$$= (b^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} \,.\, 2x\, dx.$$

Hier ist $d\,(x^2) = 2x\,dx$

also $X = x^2$
$$a = b^2$$
$$c = 1$$
$$p = \tfrac{1}{2}.$$

Folglich $y = \dfrac{(b^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}{1 + \frac{1}{2}} + C$
$$= \tfrac{2}{3} \,.\, (b^2 + x^2)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Ex. 2. Es sey $dy = \dfrac{(4x + 4bx^3)\, dx}{\sqrt[3]{(2x^2 + 6x^4)^2}}$
$$= (2x^2 + bx^4)^{-\frac{2}{3}} \,.\, (4x + 4bx^3)\, dx.$$

Es ist hier $d\,(2x^2 + bx^4) = (4x + 4bx^3)\, dx,$

also $X = 2x^2 + bx^4$
$$a = 0$$
$$c = 1$$
$$p = -\tfrac{2}{3}.$$

Folglich $y = \dfrac{(2x^2 + bx^4)^{-\frac{2}{3}+1}}{1 - \frac{2}{3}} + C$
$$= 3 \,.\, (2x^2 + bx^4)^{\frac{1}{3}} + C.$$

Ex. 3. Es sey $dy = [a + \sqrt{(a^2 - x^2)}]^2 \,.\, \dfrac{-x \,.\, dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}.$

Es ist $d\,(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2} \,.\, (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \,.\, -2x \,.\, dx,$
$$= -\frac{x \,.\, dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}},$$

also $X = \sqrt{(a^2 - x^2)}$
$$a = a$$
$$c = 1$$
$$p = 2.$$

Folglich $y = \dfrac{[a + \sqrt{(a^2 - x^2)}]^3}{3}.$

§. 290. Aufg. Die Umstände zu bestimmen, unter denen sich der Ausdruck

$$x^m (a + bx^n)^p . dx = dy,$$

wenn p eine verneinte ganze Zahl, oder einen bejahten oder verneinten Bruch bedeutet, durch eine endliche Reihe integriren läßt. (§. 263.)

Aufl. Man setze

$$a + bx^n = z,$$

$$\text{also } x = \left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$dx = \frac{1}{n} . \left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{1-n}{n}} . \frac{dz}{b} .$$

Hierdurch wird

$$dy = \left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} . z^p . \frac{1}{n} . \left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{1-n}{n}} . \frac{dz}{b}$$

$$\text{oder } dy = \left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1} . \frac{z^p . dz}{nb} .$$

Dieses Ausdrucks Integral läßt sich in einem endlichen Ausdruck finden, wenn entweder $\frac{m+1}{n} - 1 = 0$, oder $\frac{m+1}{n} - 1 =$ einer bejahten ganzen Zahl r ist.

Im ersten Fall ist nämlich

$$dy = \frac{z^p . dz}{nb};$$

im zweiten

$$dy = \frac{1}{n . b^{r+1}} . [z^{r+p} . dz - raz^{r+p-1} . dz + \frac{r(r-1)}{1 . 2} a^2 z^{r+p-2} . dz$$

$$- \frac{r(r-1)(r-2)}{1 . 2 . 3} a^3 z^{r+p-3} . dz + . . . \pm a^r z^p . dz] \; (\mathfrak{A}).$$

Nun sey 1) p eine verneinte ganze Zahl. In diesem Fall hat man

$$\text{für } \frac{m+1}{n} - 1 = 0,$$

$$dy = \frac{1}{nb} \cdot z^{-p} \cdot dz$$

$$\text{und } y = \frac{1}{nb} \cdot \frac{1}{1-p} \cdot z^{1-p} + C. \text{ (A.)}$$

Ist in $dy = \frac{z^p \cdot dz}{nb}$ das $p = -1$, so wird nach der Formel (A.)

$$y = \frac{1}{nb} \cdot \frac{1}{0} + C.$$

Dieser Ausdruck ist nicht brauchbar. (§. 262.)

In diesem Fall ist aber

$$dy = \frac{1}{nb} \cdot \frac{dz}{z}$$

$$\text{und } y = \frac{1}{nb} \cdot \lg z + C.$$

Für $\frac{m+1}{n} - 1 = r$ hat man, wenn p verneint ist,

$$dy = \frac{1}{n.b^{r+1}} \cdot [z^{r-p} . dz - raz^{r-p-1} . dz + \frac{r(r-1)}{1.2} a^2 z^{r-p-2} . dz$$
$$- \frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3} a^3 z^{r-p-3} . dz + \ldots \pm a^r z^{-p} . dz]$$

und

$$y = \frac{1}{n.b^{r+1}} \left[\frac{z^{r-p+1}}{r-p+1} - \frac{raz^{r-p}}{r-p} + \frac{r(r-1)}{1.2} \cdot \frac{a^2 . z^{r-p-1}}{r-p-1} \right.$$
$$\left. - \frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3} \cdot \frac{a^3 z^{r-p-2}}{r-p-2} + \ldots \pm \frac{a^r . z^{-p+1}}{-p+1} \right] + C.$$

Ist hier p nicht größer, als $r+1$, so enthält die Reihe ein Glied, in welchem sich $\frac{1}{0}$ befindet. Wäre z. B. $p = r+1$, so wäre das erste Glied des eingeklammerten Faktors $= \frac{1}{0}$; wäre $p = r$, so wäre das zweite Glied desselben $= ra . \frac{1}{0}$.

Dem Gliede, in welchem sich $\frac{1}{0}$ befindet, entspricht ein Glied der Reihe für dy, welches $\frac{dz}{z}$ enthält und dessen Integral also logarithmisch ist. Wäre z. B. $p = r+1$, so wäre das

dem ersten Gliede des eingeklammerten Faktors entsprechende Glied der Reihe für dy, $\frac{dz}{z}$ u. s. w.

Ex. Man soll $\frac{x^3dx}{(1+x)^2} = x^3 . (1+x)^{-2} . dx$ integriren.

Hier ist $m = 3$, $a = 1$, $b = 1$, $p = -2$, $n = 1$, $\frac{m+1}{n} - 1 = r = \frac{3+1}{1} - 1 = 3$, $z = 1 + x$.

Also, wenn man diese Werthe in (♂) setzt und integrirt,

$$\int x^3 (1+x)^{-2} . dx = \int [z^{3-2} . dz - 3 . z^{3-3} . dz + \frac{3.2}{1.2} . z^{3-4} . dz$$

$$- \frac{3.2.1}{1.2.3} . z^{3-5} . dz] + C$$

$$= \frac{z^2}{2} - 3 . z + \frac{3.2}{1.2} . \frac{1}{0} + z^{-1} + C$$

$$= \int [z . dz - 3 . dz + 3 . \frac{dz}{z} - z^{-2} dz] + C$$

$$= \tfrac{1}{2} z^2 - 3z + 3 . \lg z + \frac{1}{z} + C$$

$$= \tfrac{1}{2}(1+x)^2 - 3(1+x) + 3 \lg(1+x) + \frac{1}{1+x} + C.$$

Es sey 2) p ein bejahter oder ein verneinter Bruch.

Hier ist für $\frac{m+1}{n} - 1 = 0$,

$$y = \frac{z^{p+1}}{nb . (p+1)} + C$$

und für $\frac{m+1}{n} - 1 = r$,

$$y = \frac{1}{nb^{r+1}} . \left[\frac{z^{r+p+1}}{r+p+1} - \frac{raz^{r+p}}{r+p} + \frac{r(r-1)a^2 . z^{r+p-1}}{r+p-1} \right.$$

$$\left. - \frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3} . \frac{a^3 z^{r+p-2}}{r+p-2} + \ldots \pm \frac{a^r . z^{p+1}}{p+1} \right] + C.$$

Ex. 1. Es sey $dy = x^m \sqrt{(a+bx)} . dx$.

Hier ist $m = m$

$n = 1$

$p = \frac{1}{2}$

$$\frac{m+1}{n} - 1 = r = m.$$

Man kann hier also $m = 1, 2, 3,$ und überhaupt gleich jeder bejahten ganzen Zahl setzen. Auch kann man $m = 0$ annehmen, in welchem Fall $\frac{m+1}{n} - 1 = 0$ wird.

Für $m = 0$ erhält man

$$\int \sqrt{(a+bx)}\,dx = y = \frac{z^{1+\frac{1}{2}}}{b\,.\,(1+\frac{1}{2})} + C$$

$$= \frac{2}{3.b}\,.\,(a+bx)^{\frac{3}{2}} + C$$

und für $m = 1$,

$$\int x\,.\,\sqrt{(a+bx)}\,dx = y = \frac{1}{b^2}\left[\frac{z^{2+\frac{1}{2}}}{2+\frac{1}{2}} - \frac{az^{1+\frac{1}{2}}}{1+\frac{1}{2}}\right] + C$$

$$= \frac{1}{b^2}\,.\,\sqrt{(a+bx)}\,[\tfrac{2}{5}\,.\,(a+bx)^2 - \tfrac{2}{3}\,.\,a\,(a+bx)] + C.$$

Ex. 2. Es sey $dy = \frac{x^m\,.\,dx}{\sqrt{(a+bx)}} = x^m\,.\,(a+bx)^{-\frac{1}{2}}.dx.$

Hier ist $m = m$

$n = 1$

$p = -\frac{1}{2}$

$\frac{m+1}{n} - 1 = r = m.$

Man kann also auch hier statt m jede bejahte ganze Zahl und auch 0 setzen.

§. 291. Es ist $a + bx^n = x^n\,.\,(ax^{-n} + b),$

$(a + bx^n)^p = x^{np}(ax^{-n} + b)^p.$

Folglich hat man auch

$$dy = x^m\,(a + bx^n)^p\,.\,dx$$

$$= x^{m+np}\,.\,(ax^{-n} + b)^p\,.\,dx.$$

Setzt man nun

$$ax^{-n} + b = z$$

$$ax^{-n} = z - b$$

$$x = \left(\frac{z-b}{a}\right)^{-\frac{1}{n}}$$

$$dx = -\frac{1}{n}\left(\frac{z-b}{a}\right)^{-\frac{1}{n}-1}.\frac{dz}{a},$$

so erhält man

$$dy = \left(\frac{z-b}{a}\right)^{-\left(\frac{m+np}{n}\right)} . z^p . -\frac{1}{n} . \left(\frac{z-b}{a}\right)^{-\frac{1}{n}-1} . \frac{dz}{a}$$

$$= -\frac{1}{n \cdot a^{-\left(\frac{m+1}{n}+p\right)}} . (z-b)^{-\left(\frac{m+1}{n}+p+1\right)} . z^p . dz \ (\odot).$$

Das Differential

$$dy = x^m (a + bx^n)^p . dx$$

läßt sich also auch dann durch einen endlichen Ausdruck integriren, wenn entweder $-\left(\frac{m+1}{n} + p + 1\right) = 0$, oder $-\left(\frac{m+1}{n} + p + 1\right) =$ einer bejahten ganzen Zahl ist.

Ex. 1. Man sucht $\int \frac{\sqrt{(2+x^2)} . dx}{x^4}$.

Hier ist $m = -4$

$n = 2$

$p = \frac{1}{2}$

$a = 2$

$b = 1$.

Also $-\left(\frac{m+1}{n} + p + 1\right) = -\left(\frac{-4+1}{2} + \frac{1}{2} + 1\right) = 0$.

Setzt man diese Werthe in $(\odot)$, so erhält man

$$dy = -\tfrac{1}{4} . z^{\frac{1}{2}} . dz.$$

Also ist

$$y = -\tfrac{1}{6} . z^{\frac{3}{2}} + C,$$

oder, da $z = a . x^{-n} + b$ hier $= 2 . x^{-2} + 1 = \frac{2}{x^2} + 1 = \frac{2+x^2}{x^2}$ ist,

$$y = -\tfrac{1}{6} . \left(\frac{2+x^2}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Ex. 2. Es sey $dy = \frac{5 . \sqrt{(1+x^2)}}{x^6} . dx$.

Hier ist $m = -6$

$n = 2$

$$p = \tfrac{1}{2}$$
$$a = 1$$
$$b = 1$$
$$-\left(\frac{m+1}{n} + p + 1\right) = -\left(\frac{-6+1}{2} + \tfrac{1}{2} + 1\right) = +1.$$

Durch Setzung dieser Werthe in (⊙) bekommt man

$$dy = -\tfrac{5}{2} \cdot (z-1) \cdot z^{\frac{3}{2}} \cdot dz$$
$$= -\tfrac{5}{2} \cdot z^{\frac{3}{2}} \cdot dz + \tfrac{5}{2} z^{\frac{1}{2}} \cdot dz.$$

Also ist

$$y = -z^{\frac{5}{2}} + \tfrac{5}{3} z^{\frac{3}{2}} + C.$$

Nun ist

$$y = ax^{-n} + b = x^{-2} + 1 = \frac{1}{x^2} + 1 = \frac{1+x^2}{x^2}.$$

Folglich ist

$$y = -\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)^{\frac{5}{2}} + \tfrac{5}{3} \cdot \left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}} + C$$
$$= -\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)^2 \cdot \sqrt{\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)} + \tfrac{5}{3} \cdot \left(\frac{1+x^2}{x^2}\right) \cdot \sqrt{\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)} + C.$$

§. 292. Es ist auch

$$x^m (a + bx^n)^p \cdot dx = x^{m+1-n} \cdot x^{n-1} \cdot (a + bx^n)^p \cdot dx.$$

Da nun

$$x^{n-1} \cdot (a + bx^n)^p \cdot dx = d\frac{(a+bx^n)^{p+1}}{(p+1)\,nb}$$ ist (§. 264),

so erhält man, wenn man

$$x^{m+1-n} = u, \text{ und } \frac{(a+bx^n)^{p+1}}{(p+1)\,nb} = v$$

setzt,

$$x^m (a+bx^n)^p \cdot dx = u \cdot dv.$$

Nun ist

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \text{ (§. 288.)}$$

Also

$$\int x^m (a+bx^n)^p \cdot dx =$$
$$= \frac{x^{m+1-n} \cdot (a+bx^n)^{p+1}}{(p+1)\,nb} - \int \frac{(a+bx^n)^{p+1} \cdot d\,(x^{m+1-n})}{(p+1)\,nb}$$
$$= \frac{x^{m+1-n} \cdot (a+bx^n)^{p+1}}{(p+1)\,nb} - \frac{m+1-n}{(p+1)nb} \cdot \int (a+bx^n)^{p+1} \cdot x^{m-n} dx.$$

Man setze der Kürze wegen $a + bx^n = w$. Hierdurch erhält man

$$\int x^m w^p . dx = \frac{x^{m+1-n} . w^{p+1}}{(p+1)nb} - \frac{m+1-n}{(p+1)nb} . \int w^{p+1} . x^{m-n} . dx \quad (A.)$$

Es ist ferner

$$(a + bx^n)^{p+1} . x^{m-n} = (a + bx^n)^p . (a + bx^n) . x^{m-n}$$
$$= a (a + bx^n)^p . x^{m-n} + b (a + bx^n)^p . x^m.$$

Also

$$(a+bx^n)^{p+1} . x^{m-n} . dx = a(a+bx^n)^p . x^{m-n} dx + b(a+bx^n)^p . x^m dx,$$

oder, wenn man w statt $a + bx^n$ setzt,

$$w^{p+1} . x^{m-n} dx = a w^p . x^{m-n} . dx + b w^p . x^m dx.$$

Durch Substitution dieses Werthes in (A.) bekommt man

$$\int x^m w^p dx = \frac{x^{m+1-n} . w^{p+1}}{(p+1) nb} - \frac{a(m+1-n)}{(p+1) nb} . \int w^p . x^{m-n} . dx$$
$$- \frac{b(m+1-n)}{(p+1) nb} . \int w^p x^m dx.$$

Also ist

$$\left(1 + \frac{m+1-n}{(p+1)n}\right) . \int x^m w^p dx = \frac{x^{m+1-n} . w^{p+1}}{(p+1)nb} - \frac{a(m+1-n)}{(p+1)nb} . \int w^p x^{m-n} dx.$$

Folglich

$$\int x^m w^p dx = \frac{x^{m+1-n} . w^{p+1}}{b(pn+m+1)} - \frac{a(m+1-n)}{b(pn+m+1)} . \int w^p x^{m-n} dx \quad (B.)$$

Man setze in (B.) nach einander $m - n$, $m - 2n$, ... statt m, so erhält man

$$\int x^{m-n} w^p dx = \frac{x^{m+1-2n} w^{p+1}}{b(pn+m-n+1)} - \frac{a(m+1-2n)}{b(pn+m-n+1)} . \int w^p x^{m-2n} . dx \quad (C.)$$

$$\int x^{m-2n} w^p dx = \frac{x^{m+1-3n} . w^{p+1}}{b(pn+m-2n+1)} - \frac{a(m+1-3n)}{b(pn+m-2n+1)} . \int w^p x^{m-3n} dx \quad (D.)$$

u. s. w.

Substituirt man nun (C.) in (B.), in das, was man hierdurch für (B.) erhält, (D.), u. s. w., so bekommt man immer mehr integrirte Theile des Integrals $\int x^m (a + bx^n)^p . dx = y$. Diese integrirten Theile heißen der algebraische Theil

des Integrals y; der noch mit dem Integrationszeichen behaftete Theil ist der involutorische oder summatorische.

Kommt man bei dem gezeigten Verfahren auf einen involutorischen Theil, der sich genau integriren läßt, so findet man das Integral $\int x^m (a + bx^n)^p \cdot dx$ vollständig.

Setzt man in (B.) $m - rn$ statt m, so erhält man

$$\int x^{m-rn} \cdot w^p dx = \frac{x^{m+1-(r+1)n} \cdot w^{p+1}}{b(pn+m-rn+1)} - \frac{a[m+1-(r+1)n]}{b(pn+m-rn+1)} \cdot \int w^p \cdot x^{m-(r+1)n} \cdot dx.$$

Ist nun $m + 1 - (r + 1)n = 0$, so ist $\int x^{m-rn} \cdot w^p dx = \frac{w^{p+1}}{b(pn+m-rn+1)}$. In diesem Fall läßt sich also das Integral von $x^m (a + bx^n)^p dx$ genau finden. Dies stimmt mit §. 290. überein. Denn aus $m + 1 - (r + 1)n = 0$ folgt $\frac{m+1}{n} - 1 = r$.

Der Zweck des dargelegten Verfahrens ist eigentlich, die Integration der Größe $x^m (a + bx^n)^p \cdot dx$ abhängig zu machen von der Integration einer Größe $x^{m-rn} \cdot (a + bx^n)^p \cdot dx$, in welcher der Exponent von x außerhalb der Parenthese niedriger ist, als in $x^m (a + bx^n)^p \cdot dx$.

Ex. Man soll $\frac{x^m \cdot dx}{\sqrt{(1 - x^2)}}$ integriren, wenn m eine bejahte ganze Zahl bedeutet.

Nach (B.) ist $\int x^m (a+bx^n)^p \cdot dx =$

$$\frac{x^{m+1-n} \cdot (a + bx^n)^{p+1}}{b(pn+m+1)} - \frac{a(m+1-n)}{b(pn+m+1)} \cdot \int (a + bx^n)^p \cdot x^{m-n} \cdot dx.$$

Setzt man nun $m = m$

$a = 1$

$b = -1$

$n = 2$

$p = -\frac{1}{2}$,

so erhält man

$$\int \frac{x^m \cdot dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\frac{x^{m-1} \cdot \sqrt{(1-x^2)}}{m} + \frac{(m-1)}{m} \cdot \int \frac{x^{m-2} \cdot dx}{\sqrt{(1-x^2)}}.$$

Nun sey 1) m eine ungrade Zahl. Man findet für

$$m = 1, \int \frac{x \cdot dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\sqrt{(1-x^2)}$$

$$= 3, \int \frac{x^3 \cdot dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\tfrac{1}{3} \cdot x^2 \cdot \sqrt{(1-x^2)} + \tfrac{2}{3} \cdot \int \frac{x \cdot dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

$$= 5, \int \frac{x^5 \cdot dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\tfrac{1}{5} x^4 \cdot \sqrt{(1-x^2)} + \tfrac{4}{5} \cdot \int \frac{x^3 \cdot dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

. . . .

Hieraus ergibt sich

$$\int \frac{x \cdot dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\sqrt{(1-x^2)} + C$$

$$\int \frac{x^3 \cdot dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -(\tfrac{1}{3}x^2 + \tfrac{2}{3}) \cdot \sqrt{(1-x^2)} + C$$

$$\int \frac{x^5 \cdot dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -(\tfrac{1}{5}x^4 + \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{4}{5}x^2 + \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{4}{5}) \cdot \sqrt{(1-x^2)} + C$$

u. s. w.

Es sey 2) m eine grade Zahl. Man findet für

$$m = 2, \int \frac{x^2 \cdot dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\frac{x \cdot \sqrt{(1-x^2)}}{2} + \tfrac{1}{2} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

$$= 4, \int \frac{x^4 \cdot dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\frac{x^3 \cdot \sqrt{(1-x^2)}}{4} + \tfrac{3}{4} \cdot \int \frac{x^2 \cdot dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

$$= 6, \int \frac{x^6 \cdot dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\frac{x^5 \cdot \sqrt{(1-x^2)}}{6} + \tfrac{5}{6} \cdot \int \frac{x^4 \cdot dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

u. s. w.

Nun ist nach §. 260.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \text{arc. Sin } x.$$

Folglich ist

$$\int \frac{x^2 \cdot dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\tfrac{1}{2} \cdot x \cdot \sqrt{(1-x^2)} + \tfrac{1}{2} \cdot \text{arc. Sin } x + C$$

$$\int \frac{x^4 \cdot dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -(\tfrac{1}{4}x^3 + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4}x) \cdot \sqrt{(1-x^2)} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \text{arc. Sin } x + C$$

$$\int \frac{x^6 \cdot dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -(\tfrac{1}{6}x^5 + \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{5}{6} \cdot x^3 + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{5}{6} \cdot x) \cdot \sqrt{(1-x^2)} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{5}{6} \cdot \text{arc. Sin } x + C.$$

§. 293. Ist in der Formel $\int x^m (a + bx^n)^p . dx$ das m verneint und das n bejaht, so muß zu Erfüllung des §. 292. angeführten Zwecks für $\int x^m (a + bx^n)^p . dx$ ein anderer Ausdruck gesucht werden, was nun geschehen soll.

§. 294. Aus (B.) (§. 292.) ergibt sich

$$\frac{a(m+1-n)}{b(pn+m+1)} . \int w^p . x^{m-n} . dx = \frac{x^{m+1-n} . w^{p+1}}{b(pn+m+1)} - \int x^m . w^p . dx.$$

Folglich ist

$$\int w^p . x^{m-n} . dx = \frac{x^{m+1-n} . w^{p+1}}{a(m+1-n)} - \frac{b(pn+m+1)}{a(m+1-n)} . \int x^m w^p . dx.$$

Setzt man hier m + n statt m, so bekommt man

$$\int w^p . x^m . dx = \frac{x^{m+1} . w^{p+1}}{a(m+1)} - \frac{b(pn+m+n+1)}{a(m+1)} . \int x^{m+n} . w^p . dx \qquad \text{(H.)}$$

Ex. Man soll $\frac{dx}{x^m . \sqrt{(1-x^2)}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} . x^{-m} . dx$ integriren.

Nach der Formel (H.) hat man

$$\int (a + bx^n)^p . x^m . dx =$$
$$\frac{x^{m+1} . (a+bx^n)^{p+1}}{a(m+1)} - \frac{b(pn+m+n+1)}{a(m+1)} . \int x^{m+n} . (a + bx^n)^p . dx.$$

Setzt man nun hier

$$m = -m$$
$$a = 1$$
$$b = -1$$
$$n = 2$$
$$p = -\tfrac{1}{2},$$

so erhält man

$$\int \frac{dx}{x^m . \sqrt{(1-x^2)}} = -\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{m-2}{m-1} . \int \frac{dx}{x^{m-2} . \sqrt{(1-x^2)}}.$$

Es sey wieder 1) m eine ungrade Zahl. Für m = 1 erhält man

$$\int \frac{dx}{x . \sqrt{(1-x^2)}} = -\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{0} + \frac{1-2}{0} . \int \frac{dx}{x^{1-2} . \sqrt{(1-x^2)}},$$

d. i. einen Ausdruck, der $\int \frac{dx}{x . \sqrt{(1-x^2)}}$ nicht gibt. Es ist aber aus §. 260.

$$\frac{dx}{x \cdot \sqrt{(1-x^2)}} = -\lg \frac{1+\sqrt{(1-x^2)}}{x}.$$

Ferner ist für

$$m = 3, \int \frac{dx}{x^3 \cdot \sqrt{(1-x^2)}} = -\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{2x^2} + \tfrac{1}{2} \cdot \int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{(1-x^2)}}$$

$$= 5, \int \frac{dx}{x^5 \cdot \sqrt{(1-x^2)}} = -\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{4x^4} + \tfrac{3}{4} \cdot \int \frac{dx}{x^3 \cdot \sqrt{(1-x^2)}}$$

u. s. w.

Man hat also

$$\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{(1-x^2)}} = -\lg \frac{1+\sqrt{(1-x^2)}}{x} + C.$$

$$\int \frac{dx}{x^3 \cdot \sqrt{(1-x^2)}} = -\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{2 \cdot x^2} - \tfrac{1}{2} \cdot \lg \frac{1+\sqrt{(1-x^2)}}{x} + C.$$

$$\int \frac{dx}{x^5 \cdot \sqrt{(1-x^2)}} = -\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{4x^4} - \tfrac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{(1-x^2)}}{2 \cdot x^2}$$

$$- \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \lg \frac{1+\sqrt{(1-x^2)}}{x} + C.$$

u. s. w.

Es sey 2) m eine gerade Zahl. Man hat für

$$m = 2, \int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{(1-x^2)}} = -\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{x} + C.$$

$$= 4, \int \frac{dx}{x^4 \cdot \sqrt{(1-x^2)}} = -\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{3 \cdot x^2} + \tfrac{2}{3} \cdot \int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{(1-x^2)}}$$

u. s. w.

§. 295. Es ist auch

$$x^m \cdot (a+bx^n)^p \cdot dx = x^m \cdot (a+bx^n)^{p-1} \cdot (a+bx^n) \cdot dx$$

$$= ax^m \cdot (a+bx^n)^{p-1} \cdot dx + bx^{m+n} \cdot (a+bx^n)^{p-1} \cdot dx.$$

Folglich, wenn man $a + bx^n = w$ setzt und integrirt,

$$\int x^m w^p \cdot dx = a \int x^m w^{p-1} dx + b \int x^{m+n} w^{p-1} \cdot dx. \quad (J.)$$

Nun erhält man, wenn in der Formel (B.) (§. 292.) das m in m + n, und das p in p − 1 verwandelt wird,

$$\int x^{m+n} \cdot w^{p-1} \cdot dx = \frac{x^{m+1} \cdot w^p}{b[(p-1)n+m+n+1]} - \frac{a(m+1)}{b[(p-1)n+m+n+1]} \cdot \int w^{p-1} \cdot x^m \cdot dx$$

$$= \frac{x^{m+1} w^p}{b(pn+m+1)} - \frac{a(m+1)}{b(pn+m+1)} . \int w^{p-1} . x^m dx.$$

Substituirt man diesen Werth in (J.), so erhält man

$$\int x^m . w^p . dx = a . \int x^m w^{p-1} . dx + \frac{x^{m+1} . w^p}{pn+m+1} - \frac{a(m+1)}{pn+m+1} . \int w^{p-1} . x^m dx$$

$$= \frac{x^{m+1} . w^p}{pn+m+1} + \frac{apn}{pn+m+1} . \int w^{p-1} . x^m dx. \text{ (K.)}$$

Hieraus ergibt sich, wenn $p - 1$, $p - 2$, ... statt p gesetzt wird,

$$\int x^m w^{p-1} dx = \frac{x^{m+1} . w^{p-1}}{(p-1)n+m+1} + \frac{(p-1)an}{(p-1)n+m+1} . \int x^m w^{p-2} . dx \text{ (L.)}$$

$$\int x^m w^{p-2} . dx = \frac{x^{m+1} . w^{p-2}}{(p-2)n+m+1} + \frac{(p-2)an}{(p-2)n+m+1} . \int x^m w^{p-3} . dx \text{ (M.)}$$

. . . .

Substituirt man nun (L.) in (K.), in das (K.), welches man hierdurch bekommt, (M.), u. s. w., so erhält man auf eine andere Art, als §. 292., immer mehr Theile des Integrals $\int x^m (a + bx^n)^p . dx$ und wird die Integration von $x^m (a + bx^n)^p . dx$ von einer andern Größe auf eine andere Art, als §. 292., abhängig.

Aus (K.) leitet man für den Fall, daß p verneint ist, her

$$\int w^{p-1} . x^m dx = - \frac{x^m . w^p}{apn} + \frac{pn+m+1}{apn} . \int x^m w^p dx$$

und hieraus

$$\int w^p x^m dx = - \frac{x^m w^{p+1}}{an(p+1)} + \frac{(p+1)n+m+1}{an(p+1)} . \int x^m . w^{p+1} . dx.$$

§. 296. **Aufg.** Ein Differential $dy = P . dx$, worin P eine irrationale Funktion von x ist, wo möglich durch einen endlichen Ausdruck zu integriren.

Aufl. Man versuche, das Differential $P . dx$ auf eine der Formen (§. 260.) zu bringen, oder es rational zu machen.

Ex. 1. Es sey $dy = \dfrac{dx}{(5 + 2x + x^2)^{\frac{1}{2}}}$.

Da $5 + 2x + x^2 = 4 + 1 + 2x + x^2 = 4 + (1 + x)^2$ ist, so hat man auch

$$dy = \frac{dx}{[4 + (1 + x)^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

Man setze $1 + x = u$, also $dx = du$. Hierdurch bekommt man

$$dy = \frac{du}{(4 + u^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{du}{\sqrt{(4 + u^2)}}$$

und es ist nach §. 260.

$$y = \lg [u + (4 + u^2)^{\frac{1}{2}}] + C$$
$$= \lg [1 + x + (5 + 2x + x^2)^{\frac{1}{2}}] + C.$$

Ex. 2. Es sey $dy = \frac{\sqrt{x} - 3a}{\sqrt[3]{x} - \sqrt{x}} . dx$

$$= \frac{x^{\frac{1}{2}} - 3a}{x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{2}}} . dx.$$

Bringt man die Exponenten der Potenzen der veränderlichen Größe unter einerlei Benennung, so erhält man als gemeinschaftlichen Nenner 6. Man setze also

$$x = z^6$$
und $dx = 6z^5dz$.

Hieraus ergibt sich

$$dy = \frac{6 (z^3 - 3a)}{z^2 - z^3} . z^5 . dz$$
$$= \frac{6 (z^6 - 3az^3)}{1 - z} . dz.$$

Zerlegt man nun den in dz multiplicirten Bruch (nach §. 265.) in eine ganze Funktion und einen echten Bruch, so läßt sich dy integriren.

Enthält ein Differential keine anderen, als monomische Wurzelgrößen, so läßt sich dasselbe immer rational machen und integriren.

Ex. 3. Es sey $dy = \sqrt{(A + Bx + Cx^2)} \cdot X\,dx$, wo X eine rationale Funktion von x bedeutet und C bejaht ist.

Es ist $A + Bx + Cx^2 = C\left(\frac{A}{C} + \frac{B}{C} + x^2\right)$.

Man setze $C = \gamma^2$, $\frac{A}{C} = \alpha$, $\frac{B}{C} = \beta$.

Hierdurch wird

$$\sqrt{(A + Bx + Cx^2)} = \gamma \cdot \sqrt{(\alpha + \beta x + x^2)}.$$

Setzt man nun

$$\sqrt{(\alpha + \beta x + x^2)} = x + z,$$

so erhält man

$$\alpha + \beta x + x^2 = x^2 + 2xz + z^2$$

$$x = \frac{\alpha - z^2}{2z - \beta}$$

$$dx = -\frac{2(\alpha - \beta z + z^2) \cdot dz}{(2z - \beta)^2}$$

$$\sqrt{(\alpha + \beta x + x^2)} = \frac{\alpha - z^2}{2z - \beta} + z$$

$$= \frac{\alpha - \beta z + z^2}{2z - \beta}$$

$$\sqrt{(A + Bx + Cx^2)}dx = -\gamma \cdot \frac{\alpha - \beta z + z^2}{2z - \beta} \cdot \frac{2(\alpha - \beta z + z^2)\,dz}{(2z - \beta)^2}.$$

So erhält man also für das irrationale Differential $\sqrt{(A + Bx + Cx^2)} \cdot dx$ ein rationales. Auch ist die Größe, welche man bekommt, wenn man in X statt x den Werth $\frac{\alpha - z^2}{2z - \beta}$ setzt, rational, da X rational ist. Das Differential läßt sich also nach den bisherigen Vorschriften integriren.

Es sey z. B. $dy = x^n dx \cdot \sqrt{(A + Bx + Cx^2)}$.

Durch Substitution der Werthe für $\sqrt{(A + Bx + Cx^2)}\,dx$ und x^n erhält man

$$dy = -\left(\frac{\alpha - z^2}{2z - \beta}\right)^n \cdot \gamma \cdot \frac{\alpha - \beta z + z^2}{2z - \beta} \cdot \frac{2(\alpha - \beta z + z^2)}{(2z - \beta)^2} \cdot dz$$

$$= -\frac{(\alpha - z^2)^n \cdot \gamma \cdot 2 \cdot (\alpha - \beta z + z^2)^2}{(2z - \beta)^{n+3}} \cdot dz.$$

Das Differential $\sqrt{(A + Bx - Cx^2)}\, X\, dx$ läßt sich durch das vorhergehende Verfahren nicht rational machen. Denn durch dasselbe bekäme man

$$\sqrt{(\alpha + \beta x - x^2)} = x + z$$

$$\alpha + \beta x - x^2 = x^2 + 2xz + z^2,$$

das x^2 auf beiden Seiten der letztern Gleichung fiel nicht weg und man erhielt für x nicht einen rationalen, sondern einen irrationalen Werth in z.

Ex. 4. Es sey $dy = \sqrt{(A + Bx - Cx^2)}\,.\, X\,.\, dx$ und A bejaht. Setzt man, wie vorhin,

$$C = \gamma^2,\ \frac{A}{C} = \alpha,\ \frac{B}{C} = \beta,$$

so erhält man

$$\sqrt{(A + Bx - Cx^2)} = \gamma\,.\,\sqrt{(\alpha + \beta x - x^2)}.$$

Nun ist $\alpha + \beta x - x^2 = -(x^2 - \beta x - \alpha)$ und die Größe $x^2 - \beta x - \alpha$ läßt sich in die zwei möglichen Faktoren

$$x - \tfrac{1}{2}\beta - \tfrac{1}{2}\sqrt{(\beta^2 + 4\alpha)},$$

$$x - \tfrac{1}{2}\beta + \tfrac{1}{2}\sqrt{(\beta^2 + 4\alpha)}$$

zerlegen. Heißen diese Faktoren $x - f$, $x - f'$, so hat man

$$x^2 - \beta x - \alpha = (x - f)(x - f'),$$

$$\alpha + \beta x - x^2 = -(x - f)(x - f'),$$

$$= (x - f)(f' - x)$$

und $\sqrt{(\alpha + \beta x - x^2)} = \sqrt{[(x - f)(f' - x)]}$.

Man setze

$$\sqrt{[(x - f)(f' - x)]} = (x - f)\,.\,z.$$

Es ergibt sich hieraus

$$(x - f)(f' - x) = (x - f)^2\,.\,z^2$$

$$f' - x = (x - f)\,.\,z^2$$

$$= x\,.\,z^2 - fz^2$$

$$x = \frac{f' + fz^2}{1 + z^2}$$

$$dx = -\frac{2\,.\,(f' - f)\,.\,z\,.\,dz}{(1 + z^2)^2}$$

$$\sqrt{(\alpha + \beta x - x^2)} = (x - f) z = \frac{(f' - f) z}{1 + z^2}$$

$$\sqrt{(A + Bx - Cx^2)}\, dx = -2 . \gamma . \frac{(f' - f) z}{1 + z^2} . \frac{(f' - f) . z . dz}{(1 + z^2)^2}$$

u. s. w.

Durch Verfahrungsarten, ähnlich denen in den Ex. 3. und 4. lassen sich auch die Differentiale von den Formen

$$\frac{X\, dx}{\sqrt{(A + Bx + Cx^2)}} \text{ und } \frac{X\, dx}{\sqrt{(A + Bx - Cx^2)}}$$

rational machen.

Man erhält für das erste Differential aus Ex. 3.

$$x = \frac{\alpha - z^2}{2z - \beta}$$

$$dx = -\frac{2 (\alpha - \beta z + z^2) . dz}{(2z - \beta)^2}$$

$$\sqrt{(A + Bx + Cx^2)} = \frac{\gamma (\alpha - \beta z + z^2)}{2z - \beta}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{(A + Bx + Cx^2)}} = -\frac{2}{\gamma} . \frac{dz}{2z - \beta} .$$

Für das zweite bekommt man aus Ex. 4.

$$x = \frac{f' + f z^2}{1 + z^2}$$

$$dx = -\frac{2 . (f' - f) . z . dz}{(1 + z^2)^2}$$

$$\sqrt{(A + Bx - Cx^2)} = \frac{\gamma . (f' - f) . z}{1 + z^2}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{(A + Bx - Cx^2)}} = -\frac{2}{\gamma} . \frac{dz}{1 + z^2} .$$

§. 297. **Aufg.** Man soll ein unmögliches Integral auf ein mögliches bringen.

Aufl. Nach §. 260. VIII. ist $\int \frac{dx}{1 - x^2} = \frac{1}{2} . \lg \frac{1 + x}{1 - x}$

und nach §. 260. XXIX. $\int \frac{dx}{1 + x^2} = \text{arc. Tg } x.$

Man setze $x^2 = -u^2$, so ist

$$x = u \cdot \sqrt{-1}$$

und $dx = du \cdot \sqrt{-1}$.

Durch Substitution dieser Werthe in die vorhergehenden Formeln erhält man

$$1) \int \frac{du \cdot \sqrt{-1}}{1 + u^2} = \tfrac{1}{2} \cdot \lg \frac{1 + u \cdot \sqrt{-1}}{1 - u \cdot \sqrt{-1}}$$

$$2) \int \frac{du \cdot \sqrt{-1}}{1 - u^2} = \text{arc. Tg}\, u \cdot \sqrt{-1}.$$

Hieraus ergibt sich

$$\text{I. } \sqrt{-1} \cdot \text{arc. Tg}\, u = \tfrac{1}{2} \cdot \lg \frac{1 + u \cdot \sqrt{-1}}{1 - u \cdot \sqrt{-1}}$$

$$\text{II. } \sqrt{-1} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \lg \frac{1 + u}{1 - u} = \text{arc. Tg}\, u \sqrt{-1}$$

oder

$$\text{arc. Tg}\, u = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{-1}} \cdot \lg \frac{1 + u \cdot \sqrt{-1}}{1 - u \cdot \sqrt{-1}} \quad (\odot)$$

und $\tfrac{1}{2} \cdot \lg \frac{1 + u}{1 - u} = \frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \text{arc. Tg}\, u \sqrt{-1}$ (♀).

Ex. 1. Man soll $\frac{a\,dx}{a^2 - bx^2}$ integriren.

Nach §. 261. 3. hat man

$$\int \frac{a\,dx}{a^2 - bx^2} = \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{a^2}{a^2 b}} \cdot \lg \frac{1 + x \cdot \sqrt{\frac{b}{a^2}}}{1 - x \cdot \sqrt{\frac{b}{a^2}}}$$

$$= \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{b}} \cdot \lg \frac{1 + \frac{x \cdot \sqrt{b}}{a}}{1 - \frac{x \cdot \sqrt{b}}{a}}.$$

Nimmt man nun b verneint, so erhält man

$$\int \frac{a\,dx}{a^2 + bx^2} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{-1}} \cdot \lg \frac{1 + \frac{x \cdot \sqrt{b}}{a} \cdot \sqrt{-1}}{1 - \frac{x \cdot \sqrt{b}}{a} \cdot \sqrt{-1}},$$

wo das Integral auf der rechten Seite der Gleichung unmöglich ist. Vergleicht man dasselbe mit der Formel (⊙) und setzt $\frac{x \cdot \sqrt{b}}{a}$ für u, so erhält man

$$\int \frac{a\,dx}{a^2 + bx^2} = \frac{1}{\sqrt{b}} \cdot \text{arc. Tg} \frac{x \cdot \sqrt{b}}{a} + C.$$

Ex. 2. Man soll $dy = \frac{dx}{a + bx + cx^2}$ integriren.

Nach §. 261. IV. ist

$$y = \sqrt{\frac{1}{Ac}} \cdot \text{arc. Tg} \left(x + \frac{b}{2c}\right) \cdot \sqrt{\frac{c}{A}}.$$

Wird nun c verneint gesetzt, so erhält man

$$y = \frac{1}{\sqrt{A} \cdot \sqrt{c} \cdot \sqrt{-1}} \cdot \text{arc. Tg} \left(x - \frac{b}{2c}\right) \cdot \sqrt{\frac{c}{A}} \cdot \sqrt{-1}.$$

Hieraus bekommt man, wenn das u in (♀) = $\left(x - \frac{b}{2c}\right) \cdot \sqrt{\frac{c}{A}}$ gesetzt wird,

$$y = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{A} \cdot \sqrt{c}} \cdot \lg \frac{1 + \left(x - \frac{b}{2c}\right) \cdot \sqrt{\frac{c}{A}}}{1 - \left(x - \frac{b}{2c}\right) \cdot \sqrt{\frac{c}{A}}} + C.$$

Setzt man endlich statt A seinen Werth $a - \frac{b^2}{4c}$, so hat man

$$y = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\left(a - \frac{b^2}{4c}\right)} \cdot \sqrt{c}} \cdot \lg \frac{1 + \left(x - \frac{b}{2c}\right) \cdot \sqrt{\frac{c}{A}}}{1 - \left(x - \frac{b}{2c}\right) \cdot \sqrt{\frac{c}{A}}} + C.$$

Zwischen den Formeln

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1 + x^2)}} = \lg [x + \sqrt{(1 + x^2)}] \quad (\text{§. 260. XI.})$$

$$\text{und} \int \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)}} = \text{arc. Sin}\, x \quad (\text{§. 260. XXV.}),$$

läßt sich eine Vergleichung anstellen, die der zwischen $\int \frac{dx}{1 - x^2}$ und $\int \frac{dx}{1 + x^2}$ angestellten ähnlich ist.

Zweites Kapitel.

Integrirung durch Reihen.

§. 298. **Aufg.** Ein Differential $dy = P.dx$, das sich durch keinen endlichen Ausdruck integriren läßt, durch eine unendliche Reihe zu integriren. P ist eine Funktion von x.

Aufl. Man verwandle das Differential in eine unendliche Reihe, die nach den Potenzen der veränderlichen Größe fortgeht. Die Monomien, aus welchen die Reihe besteht, integrire man nach den bisher gegebenen Vorschriften.

Ex. 1. Es sey $dy = \frac{dx}{1+x}$.

Hier ist $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$

$$\frac{dx}{1+x} = dx - x\,dx + x^2dx - x^3dx + \ldots$$

Also $\int\frac{dx}{1+x} = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots$

Nach §. 260. ist

$$\int\frac{dx}{1+x} = \lg(1+x).$$

Also ist

$$\lg(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \ldots + C.$$

Da für $x = 0$, $\lg(1+x) = 0$ wird und auch alle Glieder auf der rechten Seite, die x enthalten, verschwinden, so ist $C = 0$.

Ex. 2. Es sey $dy = \frac{dx}{1+x^2}$.

Es ist $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots$

$$\frac{dx}{1+x^2} = dx - x^2dx + x^4dx - x^6dx + \ldots$$

Also $\int\frac{dx}{1+x^2} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \ldots$

Nach §. 260. ist $\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc. Tg}\, x.$

Also ist $\text{arc. Tg}\, x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \ldots$

Für $x = 0$ wird die rechte und die linke Seite dieser Gleichung $= 0$; also ist die Constante $= 0$.

Ex. 3. Es sey $dy = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot dx.$

Man findet nach dem binomischen Lehrsatze

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \ldots$$

Also ist

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = dx + \tfrac{1}{2}x^2dx + \frac{1.3}{2.4}x^4dx + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6dx + \ldots$$

und $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{x^7}{7} + \ldots$

Nach §. 260. ist

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \text{arc. Sin}\, x.$$

Folglich ist

$$\text{arc. Sin}\, x = x + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{x^7}{7} + \ldots$$

Die Constante ist $= 0$.

Folgende Methode, welche die Bernoullische heißt, gibt ein anderes Verfahren an die Hand, durch Reihen zu integriren.

§. 299. Aufg. Man soll $\int X dx$, wo X eine Funktion von x ist, durch eine, nach den Potenzen von x fortlaufende, Reihe bestimmen.

Aufl. Es ist, wenn u und v Funktionen von x bedeuten,

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du \quad (\odot).$$

Setzt man nun $u = X$, und $dv = dx$, so ergibt sich

$$\int X\, dx = Xx - \int x \cdot dX.$$

Es sey $dX = X'dx$,

also $\int x \cdot dX = \int X' \cdot x\, dx.$

Man findet hieraus, in der Formel $(\odot)$

$u = X'$, und $dv = x\,dx$, also $v = \frac{x^2}{2}$ setzend,

$$\int x\,.\,dX = \frac{X'x^2}{2} - \tfrac{1}{2}\,.\int x^2\,.\,dX'.$$

Es sey $dX' = X''\,dx$,

also $x^2\,.\,dX' = X''\,.\,x^2 dx$.

Hieraus ergibt sich durch Anwendung der Formel (⊙)

$$\int x^2\,.\,dX' = \frac{X''\,.\,x^3}{3} - \tfrac{1}{3}\,.\int x^3\,.\,dX''.$$

Ist ferner $dX'' = X'''\,dx$,

also $x^3 dX'' = X'''\,.\,x^3 dx$,

so findet man

$$\int x^3\,.\,dX'' = \frac{X'''\,.\,x^4}{4} - \tfrac{1}{4}\,.\int x^4\,.\,dX'''.$$

Auf dieselbe Art ergibt sich

$$\int x^4\,.\,dX''' = \frac{X^{IV}\,.\,x^5}{5} - \tfrac{1}{5}\,.\int x^5\,.\,dX^{IV}$$

u. s. w.

Durch die gehörigen Substitutionen findet man aus dem Bisherigen

$$\int X\,dx = Xx - \frac{X'x^2}{2} + \frac{X''x^3}{2.3} - \frac{X'''x^4}{2.3.4} + \frac{X^{IV}x^5}{2.3.4.5} - \ldots\ldots$$

Nun ist $X' = \frac{dX}{dx}$

$$X'' = \frac{dX'}{dx}$$

$$= \frac{d^2X}{dx^2}$$ (dx wird als beständig angenommen)

$$X''' = \frac{dX''}{dx}$$

$$= \frac{d^3X}{dx^3}$$

$$X^{IV} = \frac{dX'''}{dx}$$

$$= \frac{d^4X}{dx^4}.$$

Also ist auch

$$\int X\,dx = Xx - \frac{dX}{dx}.\frac{x^2}{2} + \frac{d^2X}{dx^2}.\frac{x^3}{2.3}$$
$$- \frac{d^3X}{dx^3}.\frac{x^4}{2.3.4} + \frac{d^4X}{dx^4}.\frac{x^5}{2.3.4.5} - \ldots$$

Ex. Man sucht $\int \frac{1}{1+x}.dx = \int (1+x)^{-1}.dx.$

Hier ist $X = (1+x)^{-1}$

$$\frac{dX}{dx} = -1.(1+x)^{-2}$$
$$\frac{d^2X}{dx^2} = +2.(1+x)^{-3}$$
$$\frac{d^3X}{dx^3} = -2.3.(1+x)^{-4}$$
$$\frac{d^4X}{dx^4} = +2.3.4.(1+x)^{-5}$$
. . . .

Also

$$\int \frac{1}{1+x}.dx = \frac{x}{1+x} + \frac{x^2}{2.(1+x)^2} + \frac{x^3}{3.(1+x)^3} + \frac{x^4}{4.(1+x)^4} + \ldots + C$$
$$= \lg(1+x) \;(\S.\ 260.)$$

Verwandelt man die Brüche $\frac{x}{1+x}$, $\frac{x^2}{2(1+x)^2}$, $\frac{x^3}{3(1+x)^3}$, u. s. w. in Reihen und addirt diese, so erhält man die §. 298. für $\lg(1+x)$ gefundene Reihe.

Drittes Kapitel.

Integration transcendenter Funktionen von einer veränderlichen Größe.

A. Integration logarithmischer Funktionen.

§. 300. Aufg. Man soll $dy = m(\lg\lg x)^{m-1}.\frac{dx}{x\lg x}$ integriren.

Aufl. Man setze $\lg x = z$, also $\frac{dx}{x} = dz$,

$$\text{so ist } dy = m(\lg z)^{m-1} \cdot \frac{dz}{z},$$

woraus sich nach §. 260. ergibt

$$y = (\lg z)^m + C$$

$$\text{oder } y = (\lg \lg x)^m + C.$$

§. 301. Aufg. Es sey $dy = nm(\lg x^m)^{n-1} \cdot \frac{dx}{x}$; man sucht y.

Aufl. Setzt man $x^m = z$, also $dx = \frac{dz}{mx^{m-1}}$ und $\lg x^m = \lg z$, so erhält man

$$dy = nm(\lg z)^{n-1} \cdot \frac{dz}{mz}$$

$$= n(\lg z)^{n-1} \cdot \frac{dz}{z}.$$

Hieraus ergibt sich

$$y = (\lg z)^n + C$$

$$= (\lg x^m)^n + C.$$

§. 302. Aufg. Das Integral von $dy = nm \cdot [\lg(\lg x)^m]^{n-1} \cdot \frac{dx}{x \lg x}$ zu finden.

Aufl. Man setze $\lg x = z$, also $\frac{dx}{x} = dz$, und $(\lg x)^m = z^m$. Hieraus ergibt sich

$$dy = nm(\lg z^m)^{n-1} \cdot \frac{dz}{z}$$

und hieraus nach der Auflösung der vorhergehenden Aufgabe:

$$y = (\lg z^m)^n + C$$

$$= [\lg(\lg x)^m]^n + C.$$

§. 303. Bei der Integration logarithmischer Differentiale kann auch in manchen Fällen die Formel

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \quad (\S.\ 288.),$$

wo u und v Funktionen von x sind, mit Vortheil angewandt werden.

Ex. Es sey $(\lg x)^n \cdot x^m dx$ zu integriren.

Man setze $u = (\lg x)^n$, also $du = n(\lg x)^{n-1} \cdot \frac{dx}{x}$,

und $dv = x^m dx$, also $v = \frac{x^{m+1}}{m+1}$,

so ist

$$\int (\lg x)^n x^m dx = \frac{x^{m+1} \cdot (\lg x)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1} \int (\lg x)^{n-1} x^m dx.$$

Setzt man nun hier $n-1$, $n-2$, ... statt n, so erhält man

$$\int (\lg x)^{n-1} x^m dx = \frac{x^{m+1} (\lg x)^{n-1}}{m+1} - \frac{n-1}{m+1} \int (\lg x)^{n-2} x^m dx,$$

$$\int (\lg x)^{n-2} x^m dx = \frac{x^{m+1} \cdot (\lg x)^{n-2}}{m+1} - \frac{n-2}{m+1} \int (\lg x)^{n-3} x^m dx,$$

. . . .

Also ist

$$\int (\lg x)^n x^m dx = \frac{x^{m+1} \cdot (\lg x)^n}{m+1} - \frac{n \cdot x^{m+1} \cdot (\lg x)^{n-1}}{(m+1)^2}$$
$$+ \frac{n(n-1)\, x^{m+1} \cdot (\lg x)^{n-2}}{(m+1)^3}$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)\, x^{m+1} \cdot (\lg x)^{n-3}}{(m+1)^4}$$
$$+ \ldots$$

Ist n eine bejahte ganze Zahl, so bricht die Reihe ab.

B. Integration der exponentialen Differentiale.

§. 304. Aufg. Das Integral von $dy = a^x \lg a\, dx$ zu finden.

Aufl. Man setze $a^x = z$, also $x \lg a = \lg z$,

$$\lg a \cdot dx = \frac{dz}{z}, \text{ und } dx = \frac{dz}{\lg a \cdot z}, \text{ so ist}$$

$$dy = z \cdot \lg a \cdot \frac{dz}{\lg a \cdot z} = dz.$$

Folglich $y = z$
$= a^x + C.$

§. 305. **Aufg.** $e^{mx}dx$ zu integriren.

Aufl. Es ist $e^{mx}dx = \frac{me^{mx}dx}{m}$ und $\int me^{mx}dx = e^{mx}$ (§. 260); also $\int e^{mx}dx = \frac{e^{mx}}{m} + C.$

§. 306. **Aufg.** Es sey $du = x^y dy \,.\, \lg x + x^{y-1}y \,.\, dx$; man sucht u.

Aufl. Setzt man $x^y = z$, $y \,.\, \lg x = \lg z$, $\lg x \,.\, dy + y \,.\, \frac{dx}{x} = \frac{dz}{z}$, $\lg x \,.\, dy = \frac{dz}{z} - y \,.\, \frac{dx}{x}$, so erhält man

$$\begin{aligned} du &= x^y \,.\, \frac{dz}{z} - x^y y \,.\, \frac{dx}{x} + x^{y-1}y\, dx \\ &= dz - x^{y-1}y \,.\, dx + x^{y-1}y\, dx \\ &= dz. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} u &= z \\ &= x^y + C. \end{aligned}$$

§. 307. Auch bei der Integration exponentialer Differentiale läßt sich die Formel

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

gebrauchen.

Ex. 1 Es sey $a^x \,.\, x^n dx$ zu integriren.

Man setze $u = x^n$, $du = nx^{n-1}dx$,

$$dv = a^x dx = \frac{a^x . \lg a . dx}{\lg a}, \quad v = \frac{1}{\lg a} \,.\, a^x,$$

so ist

$$\begin{aligned} \int a^x x^n dx &= \frac{x^n \,.\, a^x}{\lg a} - \int \frac{1}{\lg a} \,.\, a^x \,.\, nx^{n-1}dx \\ &= \frac{x^n \,.\, a^x}{\lg a} - \frac{n}{\lg a} \,.\, \int a^x x^{n-1}dx. \end{aligned}$$

Setzt man nun nach einander $n-1$, $n-2$, ... statt n, so erhält man

$$\int a^x x^{n-1}dx = \frac{x^{n-1} \,.\, a^x}{\lg a} - \frac{n-1}{\lg a} \,.\, \int a^x x^{n-2}dx,$$

$$\int a^x x^{n-2}dx = \frac{x^{n-2} \,.\, a^x}{\lg a} - \frac{n-2}{\lg a} \,.\, \int a^x x^{n-3}dx,$$

. . . .

Durch die gehörigen Substitutionen ergibt sich hieraus

$$\int a^x x^n dx = \frac{x^n \cdot a^x}{\lg a} - \frac{n \cdot x^{n-1} \cdot a^x}{(\lg a)^2} + \frac{n \cdot n-1 \cdot x^{n-2} \cdot a^x}{(\lg a)^3}$$
$$- \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot x^{n-3} \cdot a^x}{(\lg a)^4} + \ldots$$

Diese Reihe bricht ab, wenn n eine bejahte ganze Zahl ist.

Ex. 2. Man sucht das Integral von $x^n e^{mx} dx$, wo e die Basis des natürlichen Logarithmensystems bedeutet.

Man setze $u = x^n$, $du = nx^{n-1}dx$,

$$dv = e^{mx}dx,\ v = \frac{e^{mx}}{m} \text{ (§. 305.)},$$

so ist

$$\int x^n e^{mx} dx = \frac{x^n \cdot e^{mx}}{m} - \int \frac{e^{mx}}{m} \cdot nx^{n-1}dx$$
$$= \frac{x^n \cdot e^{mx}}{m} - \frac{n}{m} \cdot \int x^{n-1} e^{mx} dx.$$

Man setze $n-1$, $n-2$, ... nach einander statt n. Hierdurch bekommt man

$$\int x^{n-1} e^{mx} dx = \frac{x^{n-1} \cdot e^{mx}}{m} - \frac{n-1}{m} \int x^{n-2} \cdot e^{mx} dx$$
$$\int x^{n-2} e^{mx} dx = \frac{x^{n-2} \cdot e^{mx}}{m} - \frac{n-2}{m} \cdot \int x^{n-3} e^{mx} dx$$

. . . .

Also ist

$$\int x^n e^{mx} dx = \frac{x^n \cdot e^{mx}}{m} - \frac{n \cdot x^{n-1} \cdot e^{mx}}{m^2} + \frac{n \cdot n-1 \cdot x^{n-2} \cdot e^{mx}}{m^3} - \ldots$$

§. 308. **Aufg.** Man soll $\frac{a^x \cdot dx}{x}$ integriren.

Aufl. Nach §. 77. ist

$$a^x = 1 + \lg a \cdot x + \frac{(\lg a)^2}{2} \cdot x^2 + \frac{(\lg a)^3}{2.3} \cdot x^3$$
$$+ \frac{(\lg a)^4}{2.3.4} \cdot x^4 + \ldots$$

Also

$$\frac{a^x \cdot dx}{x} = \frac{dx}{x} + \lg a \cdot dx + \frac{(\lg a)^2}{2} \cdot x\, dx$$
$$+ \frac{(\lg a)^3}{2.3} \cdot x^2 dx + \frac{(\lg a)^4}{2.3.4} \cdot x^3 dx + \ldots$$

Folglich

$$\int \frac{a^x dx}{x} = \lg x + \lg a \cdot x + \frac{(\lg a)^2}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{(\lg a)^3}{2.3} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{(\lg a)^4}{2.3.4} \cdot \frac{x^4}{4} + \ldots + C.$$

C. Integration trigonometrischer Differentiale.

§. 309. Aufg. Man soll $\mathrm{Cos}\, mx \cdot dx$ integriren.

Aufl. Man setze $mx = y$, also $dx = \frac{dy}{m}$, so erhält man

$$\int \mathrm{Cos}\, mx \cdot dx = \int \mathrm{Cos}\, y \cdot \frac{dy}{m}$$

$$= \frac{1}{m} \cdot \mathrm{Sin}\, y + C \text{ (§. 260.)}$$

$$= \frac{1}{m} \cdot \mathrm{Sin}\, mx + C.$$

§. 310. Aufg. Das Differential $\mathrm{Sin}\, mx \cdot dx$ zu integriren.

Aufl. Es sey $mx = y$, also $dx = \frac{dy}{m}$. Hierdurch erhält man

$$\int \mathrm{Sin}\, mx \cdot dx = \mathrm{Sin}\, y \cdot \frac{dy}{m}$$

$$= -\frac{1}{m} \cdot \mathrm{Cos}\, y + C \text{ (§. 260.)}$$

$$= -\frac{1}{m} \cdot \mathrm{Cos}\, mx + C.$$

§. 311. Aufg. Das Differential $\mathrm{Sin}\, mx . \mathrm{Cos}\, nx . dx$ zu integriren.

Aufl. Nach trigonometrischen Gründen ist

$$\mathrm{Sin}\,(a + b) = \mathrm{Sin}\, a \cdot \mathrm{Cos}\, b + \mathrm{Cos}\, a \cdot \mathrm{Sin}\, b$$

und $\mathrm{Sin}\,(a - b) = \mathrm{Sin}\, a \cdot \mathrm{Cos}\, b - \mathrm{Cos}\, a \cdot \mathrm{Sin}\, b.$

Also $\mathrm{Sin}\,(a + b) + \mathrm{Sin}\,(a - b) = 2 \cdot \mathrm{Sin}\, a \cdot \mathrm{Cos}\, b$

und $\frac{1}{2} \cdot \mathrm{Sin}\,(a + b) + \frac{1}{2} \cdot \mathrm{Sin}\,(a - b) = \mathrm{Sin}\, a \cdot \mathrm{Cos}\, b.$

Hieraus erhält man, wenn mx statt a, und nx statt b gesetzt wird,

$$\tfrac{1}{2}\mathrm{Sin}\,(m+n)\,x + \tfrac{1}{2}\mathrm{Sin}\,(m-n)\,x = \mathrm{Sin}\,mx\,.\,\mathrm{Cos}\,nx.$$

Also ist

$$\mathrm{Sin}\,mx.\mathrm{Cos}\,nx.dx = \tfrac{1}{2}\mathrm{Sin}\,(m+n)x\,.\,dx + \tfrac{1}{2}\mathrm{Sin}\,(m-n)x\,.\,dx.$$

Folglich

$$\int \mathrm{Sin}\,mx.\mathrm{Cos}\,nx.dx = -\frac{\mathrm{Cos}\,(m+n)x}{2.(m+n)} - \frac{\mathrm{Cos}\,(m-n)x}{2\,(m-n)} + C.$$

§. 312. Durch ähnliche Entwicklungen lassen sich auch die Differentiale $\mathrm{Sin}\,mx\,.\,\mathrm{Sin}\,nx\,.\,dx$, und $\mathrm{Cos}\,mx\,.\,\mathrm{Cos}\,nx\,.\,dx$ integriren. Es ist

$$\int \mathrm{Sin}\,mx\,.\,\mathrm{Sin}\,nx\,.\,dx = \frac{\mathrm{Sin}\,(m-n)\,x}{2\,(m-n)} - \frac{\mathrm{Sin}\,(m+n)\,x}{2\,.\,(m+n)}$$

$$\int \mathrm{Cos}\,mx\,.\,\mathrm{Cos}\,nx\,.\,dx = \frac{\mathrm{Sin}\,(m+n)\,x}{2.(m+n)} + \frac{\mathrm{Sin}\,(m-n)\,x}{2\,.\,(m-n)}.$$

§. 313. Nach dem Bisherigen lassen sich auch integriren die Ausdrücke

$$[a + b\,\mathrm{Sin}\,x + c\,\mathrm{Sin}\,2x + d\,\mathrm{Sin}\,3x + \ldots]\,.\,dx$$

und $[a + b\,\mathrm{Cos}\,x + c\,\mathrm{Cos}\,2x + d\,.\,\mathrm{Cos}\,3x + \ldots]\,.\,dx.$

Das Integral des ersten Ausdrucks ist

$$ax - b\,\mathrm{Cos}\,x - \tfrac{1}{2}c\,.\,\mathrm{Cos}\,2x - \tfrac{1}{3}d\,.\,\mathrm{Cos}\,3x - \ldots + C$$

und des zweiten

$$ax + b\,\mathrm{Sin}\,x + \tfrac{1}{2}c\,\mathrm{Sin}\,2x + \tfrac{1}{3}d\,.\,\mathrm{Sin}\,3x + \ldots + C.$$

§. 314. Aus trigonometrischen Gründen ist bekannt, daß

$$\mathrm{Cos}\,x = \mathrm{Cos}\,x$$
$$2\,.\,\mathrm{Cos}\,x^2 = \mathrm{Cos}\,2x + 1$$
$$4\,.\,\mathrm{Cos}\,x^3 = \mathrm{Cos}\,3x + 3\mathrm{Cos}\,x$$
$$8\,.\,\mathrm{Cos}\,x^4 = \mathrm{Cos}\,4x + 4\mathrm{Cos}\,2x + 3$$

u. s. w., und

$$\mathrm{Sin}\,x = \mathrm{Sin}\,x$$
$$2\,.\,\mathrm{Sin}\,x^2 = -\mathrm{Cos}\,2x + 1$$
$$4\,.\,\mathrm{Sin}\,x^3 = -\mathrm{Sin}\,3x + 3\mathrm{Sin}\,x$$
$$8\,.\,\mathrm{Sin}\,x^4 = \mathrm{Cos}\,4x - 4\,.\,\mathrm{Cos}\,2x + 3$$

u. s. w. ist.

Diese Entwicklungen als bekannt vorausgesetzt, hat es also keine Schwierigkeit, nach dem Vorhergehenden, z. B. $\text{Cos}\,x^4 \,.\, dx$, oder $\text{Sin}\,x^4 \,.\, dx$ zu integriren.

Die Ausdrücke für die Potenzen der Cosinus und Sinus können auf folgende Art gefunden werden.

§. 315. **Aufg.** Die Potenz der Sinus und Cosinus des einfachen Bogens durch die Sinus und Cosinus des vielfachen Bogens auszudrücken.

Man setze $\text{Cos}\,x + \text{Sin}\,x \,.\, \sqrt{-1} = u$ (§. 99.)

$$\text{und } \text{Cos}\,x - \text{Sin}\,x \,.\, \sqrt{-1} = v,$$

$$\text{so ist } 2\,\text{Cos}\,x = u + v$$

$$2 \,.\, \text{Sin}\,x \,.\, \sqrt{-1} = u - v$$

$$\text{Cos}\,x = \tfrac{1}{2}(u + v)$$

$$\text{Sin}\,x = \frac{1}{2 \,.\, \sqrt{-1}} \,.\, (u - v).$$

Folglich ist

$$\text{Cos}\,x^n = \frac{1}{2^n} \,.\, (u + v)^n$$

$$= \frac{1}{2^n} \,.\, (v + u)^n$$

$$\text{und } \text{Sin}\,x^n = \frac{1}{(2 \,.\, \sqrt{-1})^n} \,.\, (u - v)^n,$$

wo n jede beliebige Zahl bedeuten kann.

I. Man erhält durch Entwicklung aus dem ersten Ausdruck für $\text{Cos}\,x^n$

$$\text{Cos}\,x^n = \frac{1}{2^n} \,.\, \Big[u^n + n \,.\, u^{n-1}v + \frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2}u^{n-2}v^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}u^{n-3}v^3 + \ldots\Big]$$

und aus dem zweiten

$$\text{Cos}\,x^n = \frac{1}{2^n} \,.\, \Big[v^n + nv^{n-1}u + \frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2}v^{n-2}u^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}v^{n-3}u^3 + \ldots\Big]$$

Also ist

$$2.\text{Cos}\,x^n = \frac{1}{2^n}.\Big[u^n + v^n + n(u^{n-1}v + v^{n-1}u) + \frac{n(n-1)}{1.2}.(u^{n-2}v^2 + v^{n-2}u^2) + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}.(u^{n-3}v^3 + v^{n-3}u^3 + \ldots\Big]$$

oder

$$2^{n+1}.\text{Cos}\,x^n = u^n + v^n + n.uv(u^{n-2} + v^{n-2}) + \frac{n(n-1)}{1.2}u^2v^2(u^{n-4} + v^{n-4}) + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}.u^3v^3(u^{n-6} + v^{n-6}) + \ldots$$

Nun ist $\text{Cos}\,nx = \frac{(\text{Cos}\,x + \text{Sin}\,x.\sqrt{-1})^n + (\text{Cos}\,x - \text{Sin}\,x.\sqrt{-1})^n}{2}$ (§. 99.)

$$= \frac{u^n + v^n}{2},$$

also $2\text{Cos}\,nx = u^n + v^n$,

also, da man statt n jede beliebige Zahl setzen kann, auch

$$2\text{Cos}\,(n-m)\,x = u^{n-m} + v^{n-m}.$$

Das gibt

für $m = 2$, $2\text{Cos}\,(n-2)\,x = u^{n-2} + v^{n-2}$

$= 4$, $2.\text{Cos}\,(n-4)\,x = u^{n-4} + v^{n-4}$

$= 6$, $2.\text{Cos}\,(n-6)\,x = u^{n-6} + v^{n-6}$

. . . .

Aus $\text{Cos}\,x + \text{Sin}\,x\,.\sqrt{-1} = u$

und $\text{Cos}\,x - \text{Sin}\,x\,.\sqrt{-1} = v$

folgt $\text{Cos}\,x^2 + \text{Sin}\,x^2 = uv = 1$.

Folglich ist

$$2^{n+1}.\text{Cos}\,x^n = 2.\text{Cos}\,nx + 2n.\text{Cos}(n-2)x + \frac{2n(n-1)}{1.2}\text{Cos}\,(n-4)\,x + \frac{2n(n-1)(n-2)}{1.2.3}.\text{Cos}\,(n-6)x + \ldots$$

Also auch

$$2^n.\text{Cos}\,x^n = \text{Cos}\,nx + n.\text{Cos}(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1.2}.\text{Cos}\,(n-4)x + \ldots$$

Bei dieser Reihe kommt man immer, sey es auch nur bei gehöriger Fortsetzung derselben, auf Cosinusse negativer Bogen.

Da aber (§. 99.)

$$\mathrm{Cos}\, x = \frac{e^{x \cdot \sqrt{-1}} + e^{-x \cdot \sqrt{-1}}}{2},$$

und also auch $\mathrm{Cos} - x = \frac{e^{-x \cdot \sqrt{-1}} + e^{x \cdot \sqrt{-1}}}{2} = \frac{e^{x \cdot \sqrt{-1}} + e^{-x \cdot \sqrt{-1}}}{2}$

ist, so ist $\mathrm{Cos}\, x = \mathrm{Cos} - x$

und $\mathrm{Cos}\, (n - m)x = \mathrm{Cos} - (n - m)x = \mathrm{Cos}\, (m - n)x.$

Ist also $(n - m)\, x$ negativ, so kann man statt desselben auch das positive $(m - n)\, x$ schreiben.

II. Die Gleichung $\mathrm{Sin}\, x^n = \frac{1}{(2.\sqrt{-1})^n} \cdot (u - v)^n$ gibt durch Entwicklung ihrer zweiten Seite $\mathrm{Sin}\, x^n =$

$$\frac{1}{(2.\sqrt{-1})^n} \cdot \left[u^n - nu^{n-1}v + \frac{n(n-1)}{1.2} u^{n-2}v^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} u^{n-3}v^3 + \ldots \right] \quad \text{(A.)}$$

Nun sey

erstens n grade.

In diesem Falle ist $(u - v)^n = (v - u)^n$,

und $\mathrm{Sin}\, x^n = \frac{1}{(2.\sqrt{-1})^n} . (u - v)^n = \frac{1}{(2.\sqrt{-1})^n} . (v - u)^n.$

Es ist also auch $\mathrm{Sin}\, x^n =$

$$\frac{1}{(2.\sqrt{-1})^n} \cdot \left[v^n - uv^{n-1}u + \frac{n(n-1)}{1.2} v^{n-2}u^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} . v^{n-3}u^3 + \ldots \right]$$

Hieraus und aus (A.) ergibt sich

$$2.\mathrm{Sin}\, x^n = \frac{1}{(2.\sqrt{-1})^n} . \Big[u^n + v^n - n(u^{n-1}v + v^{n-1}u)$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}(u^{n-2}v^2 + v^{n-2}u^2) - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(u^{n-3}v^3 + v^{n-3}u^3) + \ldots \Big]$$

$$= \frac{1}{(2.\sqrt{-1})^n} \Big[u^n + v^n - nuv\, (u^{n-2} + v^{n-2})$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1.2} u^2v^2\, (u^{n-4} + v^{n-4}) + \ldots \Big]$$

Also ist, nach den Entwicklungen in (I.),

$$2.(2.\sqrt{-1})^n.\text{Sin}\,x^n = 2\,\text{Cos}\,nx - 2n.\text{Cos}(n-2)x + \frac{2n(n-1)}{1.2}\text{Cos}(n-4)x - \frac{2n(n-1)(n-2)}{1.2.3}.\text{Cos}(n-6)x + \ldots$$

Folglich

$$(2.\sqrt{-1})^n.\text{Sin}\,x^n = \text{Cos}\,nx - n\,\text{Cos}(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1.2}.\text{Cos}(n-4)x - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}.\text{Cos}(n-6)x + \ldots$$

Da n eine grade Zahl ist, so ist $(2.\sqrt{-1})^n$ möglich.

Das $(2.\sqrt{-1})^n$ ist bejaht oder verneint, je nachdem n ein Produkt aus 2 in eine grade oder in eine ungrade Zahl ist. Es ist also

$$\pm 2^n.\text{Sin}\,x^n = \text{Cos}\,nx - n\,\text{Cos}(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1.2}.\text{Cos}(n-4)x - \ldots$$

Für die Cosinusse negativer Bogen gilt die Bemerkung in (I.).

Es sey

zweitens n ungrade.

Bei dieser Voraussetzung ist $(u-v)^n = -(v-u)^n$, und also

$$\text{Sin}\,x^n = \frac{1}{(2.\sqrt{-1})^n}.(u-v)^n = -\frac{1}{(2.\sqrt{-1})^n}.(v-u)^n.$$

Also ist

I. $\text{Sin}\,x^n =$

$$\frac{1}{(2.\sqrt{-1})^n}.\left[u^n - nu^{n-1}v + \frac{n(n-1)}{1.2}u^{n-2}v^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}u^{n-3}v^3 + \ldots\right]$$

II. $\text{Sin}\,x^n =$

$$\frac{1}{(2.\sqrt{-1})^n}.\left[-v^n + nv^{n-2}u - \frac{n(n-1)}{1.2}v^{n-2}u^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}v^{n-3}u^3 - \ldots\right]$$

Folglich

$$2.\text{Sin}\,x^n = \frac{1}{(2.\sqrt{-1})}\left[u^n - v^n - n(u^{n-1}v - v^{n-1}u) + \frac{n(n-1)}{1.2}(u^{n-2}v^2 - v^{n-2}u^2) - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}.(u^{n-3}v^3 - v^{n-3}u^3) + \ldots\right]$$

$$= \frac{1}{(2.\sqrt{-1})^{n}} \cdot \Big[u^n - v^n - nuv(u^{n-2} - v^{n-2}) + \frac{n(n-1)}{1.2} u^2v^2(u^{n-4} - v^{n-4})$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} u^3v^3(u^{n-6} - v^{n-6}) + \ldots \Big]$$

Nun ist $uv = 1$, und

$$\text{Sin}\, nx = \frac{(\text{Cos}\, x + \text{Sin}\, x.\sqrt{-1})^n - (\text{Cos}\, x - \text{Sin}\, x.\sqrt{-1})^n}{2.\sqrt{-1}}$$
$$= \frac{u^n - v^n}{2.\sqrt{-1}},$$

wo man für n, welche Zahl man will, setzen kann; also ist auch

$$\text{Sin}\,(n-m)x = \frac{1}{2.\sqrt{-1}}.(u^{n-m} - v^{n-m});$$

folglich $u^n - v^n = 2.\sqrt{-1}.\text{Sin}\, nx$

$$u^{n-2} - v^{n-2} = 2.\sqrt{-1}.\text{Sin}\,(n-2)x$$
$$u^{n-4} - v^{n-4} = 2.\sqrt{-1}.\text{Sin}\,(n-4)x$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Folglich ist $2.\text{Sin}\, x^n =$

$$\frac{\sqrt{-1}}{(2.\sqrt{-1})^n}.\Big[2\text{Sin}\, nx - \frac{2n}{1}\text{Sin}\,(n-2)x + \frac{2n(n-1)}{1.2}\text{Sin}(n-4)x - \ldots\Big]$$

oder $\text{Sin}\, x^n =$

$$\frac{1}{2^n.(\sqrt{-1})^{n-1}}\Big[\text{Sin}\, nx - n\text{Sin}\,(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1.2}\text{Sin}\,(n-4)x - \ldots\Big]$$

Da nun n ungrade ist, so ist $n-1$ grade, und also $(\sqrt{-1})^{n-1}$ möglich, und bejaht oder verneint, je nachdem $n-1$ ein Produkt aus 2 in eine grade oder eine ungrade Zahl ist.

Folglich ist für ein ungrades n, je nachdem $n-1$ ein Produkt aus 2 in eine grade oder in eine ungrade Zahl ist,

$$2^n.\text{Sin}\, x^n = \pm(\text{Sin}\, nx - n\text{Sin}\,(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1.2}.\text{Sin}(n-4)x - \ldots)$$

§. 316. Die Ausdrücke $\text{Sin}\, x^n.dx$ und $\text{Cos}\, x^n dx$, worin n eine bejahte ganze Zahl bedeutet, lassen sich auch noch auf eine andere, als auf die vorhergehende Art integriren.

§. 317. Aufg. Das Differential $\text{Sin}\, x^n.dx$ zu integriren, wenn n eine bejahte ganze Zahl bedeutet.

Aufl. Es ist $\text{Sin}\,x \,.\, dx = -d\,\text{Cos}\,x$.

Also $\text{Sin}\,x^n \,.\, dx = -\text{Sin}\,x^{n-1} \,.\, d\,\text{Cos}\,x$.

Nun ist

$$\int udv = uv - \int vdu \text{ (§. 288.)}.$$

Setzt man also $u = -\text{Sin}\,x^{n-1}$,

also $du = -(n-1) \,.\, \text{Sin}\,x^{n-2} \,.\, \text{Cos}\,x\,dx$;

ferner $dv = d\,\text{Cos}\,x$,

also $v = \text{Cos}\,x$,

so ist

$$\int \text{Sin}\,x^n dx = -\text{Sin}\,x^{n-1}.\text{Cos}\,x + \int \text{Cos}\,x.(n-1)\text{Sin}\,x^{n-2}.\text{Cos}\,x\,dx$$
$$= -\text{Sin}\,x^{n-1}.\text{Cos}\,x + (n-1).\int \text{Sin}\,x^{n-2}.\text{Cos}\,x^2 dx,$$

oder, da $\text{Cos}\,x^2 = 1 - \text{Sin}\,x^2$ ist,

$$\int \text{Sin}x^n dx = -\text{Sin}x^{n-1}.\text{Cos}x + (n-1).\text{Sin}x^{n-2}dx - (n-1)\int \text{Sin}x^n dx.$$

Hieraus ergibt sich

$$\int \text{Sin}\,x^n dx = -\frac{1}{n}.\text{Sin}\,x^{n-1}.\text{Cos}\,x + \frac{n-1}{n}.\text{Sin}\,x^{n-2}.dx.$$

Nun sey 1) $n = 2, 4, 6, \ldots$, so ist

$$\int \text{Sin}\,x^2 dx = -\tfrac{1}{2}\text{Sin}\,x \,.\, \text{Cos}\,x + \tfrac{1}{2}.x$$
$$\int \text{Sin}\,x^4 dx = -\tfrac{1}{4}.\text{Sin}\,x^3 \,.\, \text{Cos}\,x + \tfrac{3}{4}.\text{Sin}\,x^2 dx$$
$$\int \text{Sin}\,x^6 dx = -\tfrac{1}{6}.\text{Sin}\,x^5 \,.\, \text{Cos}\,x + \tfrac{5}{6}.\text{Sin}\,x^4 dx$$

. . . .

Es sey 2) $n = 1, 3, 5, 7, \ldots$, so ist

$$\int \text{Sin}\,x \,.\, dx = -\text{Cos}\,x$$
$$\int \text{Sin}\,x^3 \,.\, dx = -\tfrac{1}{3}.\text{Sin}\,x^2 \,.\, \text{Cos}\,x + \tfrac{2}{3}.\text{Sin}\,x \,.\, dx$$
$$\int \text{Sin}\,x^5 \,.\, dx = -\tfrac{1}{5}\text{Sin}\,x^4 \,.\, \text{Cos}\,x + \tfrac{4}{5}.\text{Sin}\,x^3 \,.\, dx$$

. . . .

§. 318. Aufg. Das Differential $\text{Cos}\,x^n \,.\, dx$ zu integriren, wenn n eine bejahte ganze Zahl bedeutet.

Aufl. Es ist $\text{Cos}\,x\,dx = d\,\text{Sin}\,x$;

also $\text{Cos}\,x^n dx = \text{Cos}\,x^{n-1} \,.\, d\,\text{Sin}\,x$.

Setzt man nun in §. 317.

$u = \text{Cos}\,x^{n-1}$

also $du = -(n-1) \,.\, \text{Cos}\,x^{n-2} \,.\, \text{Sin}\,x\,dx$;

ferner $dv = d\,\mathrm{Sin}\,x$

$v = \mathrm{Sin}\,x$,

so erhält man

$$\int \mathrm{Cos}\,x^n dx = \mathrm{Cos}\,x^{n-1}.\mathrm{Sin}\,x + \int \mathrm{Sin}\,x.(n-1).\mathrm{Cos}\,x^{n-2}.\mathrm{Sin}\,x\,dx,$$
$$= \mathrm{Cos}\,x^{n-1}.\mathrm{Sin}\,x + (n-1)\int \mathrm{Cos}\,x^{n-2}.\mathrm{Sin}\,x^2.dx.$$

Hieraus ergibt sich, wenn man $1 - \mathrm{Cos}\,x^2$ statt $\mathrm{Sin}\,x^2$ setzt und reducirt,

$$\int \mathrm{Cos}\,x^n dx = \frac{1}{n}.\mathrm{Cos}\,x^{n-1}.\mathrm{Sin}\,x + \frac{n-1}{n}.\int \mathrm{Cos}\,x^{n-2}dx.$$

Man findet hieraus für $n = 2, 4, 6, \ldots$

$$\int \mathrm{Cos}\,x^2 dx = \tfrac{1}{2}.\mathrm{Cos}\,x.\mathrm{Sin}\,x + \tfrac{1}{2}x$$
$$\int \mathrm{Cos}\,x^4 dx = \tfrac{1}{4}.\mathrm{Cos}\,x^3.\mathrm{Sin}\,x + \tfrac{3}{4}.\int \mathrm{Cos}\,x^2 dx$$

. . . .

Für $n = 1, 3, 5, \ldots$

$$\int \mathrm{Cos}\,x\,dx = \mathrm{Sin}\,x$$
$$\int \mathrm{Cos}\,x^3 dx = \tfrac{1}{3}.\mathrm{Cos}\,x^2.\mathrm{Sin}\,x + \tfrac{2}{3}.\int \mathrm{Cos}\,x\,dx$$

. . . .

§. 319. **Aufg.** Es soll $\frac{dx}{\mathrm{Sin}\,x^n}$ integrirt werden, wenn n eine bejahte ganze Zahl ist.

Aufl. Es ist $\frac{dx}{\mathrm{Sin}\,x^n} = \mathrm{Cosec}\,x^n dx$

$$= \mathrm{Cosec}\,x^{n-2}.\mathrm{Cosec}\,x^2 dx$$
$$= -\mathrm{Cosec}\,x^{n-2}.d\,\mathrm{Cot}\,x.\ (\text{§. } 260.)$$

Man setze in §. 317.

$u = -\mathrm{Cosec}\,x^{n-2}$

also $du = -(n-2)\,\mathrm{Cosec}\,x^{n-3}.d\,\mathrm{Cosec}\,x$

$= (n-2)\,\mathrm{Cosec}\,x^{n-3}.\mathrm{Cosec}\,x.\mathrm{Cot}\,x.dx$

$= (n-2)\,\mathrm{Cosec}\,x^{n-2}.\mathrm{Cot}\,x\,dx;$

ferner $dv = d\,\mathrm{Cot}\,x$

$v = \mathrm{Cot}\,x$,

so ist

$$\int \frac{dx}{\mathrm{Sin}\,x^n} = -\mathrm{Cosec}\,x^{n-2}.\mathrm{Cot}\,x - \int \mathrm{Cot}\,x.(n-2).\mathrm{Cosec}\,x^{n-2}.\mathrm{Cot}\,x\,dx$$
$$= -\mathrm{Cosec}\,x^{n-2}.\mathrm{Cot}\,x - (n-2)\int \mathrm{Cosec}\,x^{n-2}.\mathrm{Cot}\,x^2.dx.$$

Nun ist $\text{Cot}\, x^2 = \text{Cosec}\, x^2 - 1$.

Also ist

$$\int \frac{dx}{\text{Sin}\, x^n} = -\text{Cosec}\, x^{n-2}.\text{Cot}\, x - (n-2)\int \text{Cosec}\, x^{n-2}.(\text{Cosec}\, x^2 - 1)dx$$

$$= -\text{Cosec}x^{n-2}.\text{Cot}x - (n-2)\int \text{Cosec}x^n dx + (n-2)\int \text{Cosec}x^{n-2}dx$$

$$= -\text{Cosec}x^{n-2}.\text{Cot}x - (n-2).\int \frac{dx}{\text{Sin}x^n} + (n-2)\int \frac{dx}{\text{Sin}x^{n-2}}$$

$$= -\text{Cosec}x^{n-2}.\text{Cot}x - n.\int \frac{dx}{\text{Sin}x^n} + 2.\int \frac{dx}{\text{Sin}x^n} + (n-2)\int \frac{dx}{\text{Sin}x^{n-2}}.$$

Folglich

$$\int \frac{dx}{\text{Sin}\, x^n} = -\frac{\text{Cot}\, x}{(n-1)\text{Sin}\, x^{n-2}} + \frac{n-2}{n-1}.\int \frac{dx}{\text{Sin}\, x^{n-2}},$$

oder, weil $\text{Cot}\, x = \frac{\text{Cos}\, x}{\text{Sin}\, x}$ ist,

$$\int \frac{dx}{\text{Sin}\, x^n} = -\frac{\text{Cos}\, x}{(n-1)\, \text{Sin}\, x^{n-1}} + \frac{n-2}{n-1}.\int \frac{dx}{\text{Sin}\, x^{n-2}}.$$

Man setze $n = 2, 4, 6, \ldots$, so erhält man

$$\int \frac{dx}{\text{Sin}\, x^2} = -\frac{\text{Cos}\, x}{\text{Sin}\, x}$$

$$\int \frac{dx}{\text{Sin}\, x^4} = -\frac{\text{Cos}\, x}{3.\text{Sin}\, x^3} + \tfrac{2}{3}.\int \frac{dx}{\text{Sin}\, x^2}$$

u. s. w.

Für $n = 3, 5, 7, \ldots$ erhält man

$$\int \frac{dx}{\text{Sin}\, x^3} = -\frac{\text{Cos}\, x}{2.\text{Sin}\, x^2} + \tfrac{1}{2}.\int \frac{dx}{\text{Sin}\, x}$$

$$\int \frac{dx}{\text{Sin}\, x^5} = -\frac{\text{Cos}\, x}{4.\text{Sin}\, x^4} + \tfrac{3}{4}.\int \frac{dx}{\text{Sin}\, x^3}$$

u. s. w.

In dem Falle, daß n eine ungrade Zahl bedeutet, kommt es darauf, $\frac{dx}{\text{Sin}\, x}$ zu integriren.

Es ist $\frac{dx}{\text{Sin}\, x} = \frac{\text{Sin}\, x.dx}{\text{Sin}\, x^2} = \frac{\text{Sin}\, x.dx}{1 - \text{Cos}\, x^2}$

$$= -\frac{d\,\text{Cos}\, x}{1 - \text{Cos}\, x^2},$$

oder, wenn man $\text{Cos}\, x = y$ setzt,

$$\frac{dx}{\text{Sin}\, x} = -\frac{dy}{1-y^2} = -\frac{dy}{(1+y)(1-y)}$$

$$= -\left[\frac{\frac{1}{2}dy}{1-y} + \frac{\frac{1}{2}dy}{1+y}\right].$$

Also ist

$$\int\frac{dx}{\text{Sin}\, x} = \tfrac{1}{2}.\lg(1-y) - \tfrac{1}{2}\lg(1+y)$$

$$= \tfrac{1}{2}.\lg\frac{1-y}{1+y}$$

$$= \tfrac{1}{2}.\lg\frac{1-\text{Cos}\, x}{1+\text{Cos}\, x}$$

$$= \lg\frac{\sqrt{(1-\text{Cos}\, x)}}{\sqrt{(1+\text{Cos}\, x)}}.$$

§. 320. Auf ähnliche Art findet man

$$\int\frac{dx}{\text{Cos}\, x^n} = \frac{\text{Sin}\, x}{(n-1)\,\text{Cos}\, x^{n-1}} + \frac{n-2}{n-1}.\int\frac{dx}{\text{Cos}\, x^{n-2}}.$$

Ist n ungrade, so kommt man auf $\int\frac{dx}{\text{Cos}\, x} = \int\frac{\text{Cos}\, x\, dx}{\text{Cos}\, x^2}$ $= \int\frac{d\,\text{Sin}\, x}{1-\text{Sin}\, x^2}$, woraus man durch das Verfahren in §. 319. findet $\int\frac{dx}{\text{Cos}\, x} = \lg\frac{\sqrt{(1+\text{Sin}\, x)}}{\sqrt{(1-\text{Sin}\, x)}}$.

§. 321. **Aufg.** Man soll $\text{Sin}\, x^m \text{Cos}\, x^n dx$ integriren.

Aufl. Es ist $\int\text{Sin}\, x^m.\text{Cos}\, x^n dx = \int\text{Sin}\, x^{m-1}.\text{Sin}\, x.\text{Cos}\, x^n dx$.

Man setze $u = \text{Sin}\, x^{m-1}$

also $du = (m-1)\,\text{Sin}\, x^{m-2}\,\text{Cos}\, x\, dx$;

ferner $dv = \text{Sin}\, x.\text{Cos}\, x^n dx$

$= -\text{Cos}\, x^n.\, d\,\text{Cos}\, x$

also $v = -\frac{\text{Cos}\, x^{n+1}}{n+1}$,

so ist $\int\text{Sin}\, x^m.\text{Cos}\, x^n dx = \int\text{Sin}\, x^{m-1}.\text{Sin}\, x.\text{Cos}\, x^n dx$

$$= -\frac{\text{Cos}\, x^{n+1}.\text{Sin}\, x^{m-1}}{n+1} + \int\frac{\text{Cos}\, x^{n+1}}{n+1}.(m-1)\,\text{Sin}\, x^{m-2}.\text{Cos}\, x\, dx$$

$$= -\frac{\text{Cos}\, x^{n+1}.\text{Sin}\, x^{m-1}}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}.\int\text{Sin}\, x^{m-2}.\text{Cos}\, x^n(1-\text{Sin}\, x^2)dx.$$

Durch gehörige Reduction erhält man hieraus

$$\int \mathrm{Sin}\,x^m . \mathrm{Cos}\,x^n dx = -\frac{\mathrm{Cos}\,x^{n+1} . \mathrm{Sin}\,x^{m-1}}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} . \int \mathrm{Sin}\,x^{m-2} . \mathrm{Cos}\,x^n dx.$$

(⊙)

Es ist auch $\int \mathrm{Sin}\,x^m\, \mathrm{Cos}\,x^n dx = \int \mathrm{Sin}\,x^m . \mathrm{Cos}\,x^{n-1} . \mathrm{Cos}\,x\, dx.$

Setzt man nun $u = \mathrm{Cos}\,x^{n-1}$

$$dv = \mathrm{Sin}\,x^m . \mathrm{Cos}\,x\, dx$$

$$= \mathrm{Sin}\,x^m . d\, \mathrm{Sin}\,x,$$

also $du = -(n-1)\, \mathrm{Cos}\,x^{n-2} . \mathrm{Sin}\,x\, dx$

und $v = \dfrac{\mathrm{Sin}\,x^{m+1}}{m+1}$,

so erhält man

$$\int \mathrm{Sin}\,x^m \mathrm{Cos}\,x^n dx = \frac{\mathrm{Sin}\,x^{m+1} . \mathrm{Cos}\,x^{n-1}}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} . \int \mathrm{Sin}\,x^m . \mathrm{Cos}\,x^{n-2} . \mathrm{Sin}\,x^2 dx$$

Hieraus ergibt sich durch Substitution von $1 - \mathrm{Cos}\,x^2$ statt $\mathrm{Sin}\,x^2$ und durch Reduction

$$\int \mathrm{Sin}\,x^m . \mathrm{Cos}\,x^n dx = \frac{\mathrm{Sin}\,x^{m+1} . \mathrm{Cos}\,x^{n-1}}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} . \int \mathrm{Sin}\,x^m \mathrm{Cos}\,x^{n-2} dx.$$

(♀)

Setzt man nun hier $m-2$ statt m, so bekommt man

$$\int \mathrm{Sin}\,x^{m-2} . \mathrm{Cos}\,x^n dx = \frac{\mathrm{Sin}\,x^{m-1} . \mathrm{Cos}\,x^{n-1}}{m+n\ 2} + \frac{n-1}{m+n-2} . \int \mathrm{Sin}\,x^{m-2} . \mathrm{Cos}\,x^{n-2} dx.$$

(☾.)

Vermittelst dieser Formel und der Formel (⊙), so wie der Formeln (§. 317. 318.) und anderer schon integrirten, läßt sich das Integral von $\mathrm{Sin}\,x^m . \mathrm{Cos}\,x^n dx$ genau finden, wenn m und n bejahte ganze Zahlen sind.

Ex. 1. Man sucht $\int \mathrm{Sin}\,x^6\, \mathrm{Cos}\,x^5 dx$.

Es ist

nach (⊙) $\int \mathrm{Sin}\,x^6 \mathrm{Cos}\,x^5 dx = -\frac{1}{11} . \mathrm{Cos}\,x^6 . \mathrm{Sin}\,x^5 + \frac{5}{11} . \int \mathrm{Sin}\,x^4 . \mathrm{Cos}\,x^5 dx$

nach (☾) $\int \mathrm{Sin}\,x^4 \mathrm{Cos}\,x^5 dx = \frac{1}{9} . \mathrm{Sin}\,x^5 . \mathrm{Cos}\,x^4 + \frac{4}{9} . \int \mathrm{Sin}\,x^4\, \mathrm{Cos}\,x^3 dx$

nach (⊙) $\int \mathrm{Sin}\,x^4 . \mathrm{Cos}\,x^3 dx = -\frac{1}{7} . \mathrm{Cos}\,x^4 . \mathrm{Sin}\,x^3 + \frac{3}{7} . \int \mathrm{Sin}\,x^2 . \mathrm{Cos}\,x^3 dx$

nach (☾) $\int \mathrm{Sin}\,x^2 \mathrm{Cos}\,x^3 dx = \frac{1}{5} . \mathrm{Sin}\,x^3 . \mathrm{Cos}\,x^2 + \frac{2}{5} . \int \mathrm{Sin}\,x^2 . \mathrm{Cos}\,x\, dx$

nach (⊙) $\int \mathrm{Sin}\,x^2 \mathrm{Cos}\,x\, dx = -\frac{1}{3} . \mathrm{Cos}\,x^2 . \mathrm{Sin}\,x + \frac{1}{3} . \int \mathrm{Cos}\,x\, dx$

$= -\frac{1}{3} . \mathrm{Cos}\,x^2 . \mathrm{Sin}\,x + \frac{1}{3} . \mathrm{Sin}\,x.$

Ex. 2. Man sucht $\int \mathrm{Sin}\, x^4 . \mathrm{Cos}\, x^7 dx$.

Es ist nach

$(\odot) \int \mathrm{Sin} x^4 . \mathrm{Cos} x^7 dx = -\frac{1}{11} . \mathrm{Cos} x^8 . \mathrm{Sin} x^3 + \frac{3}{11} \int \mathrm{Sin} x^2 . \mathrm{Cos} x^7 dx$

$(☾) \int \mathrm{Sin} x^2 . \mathrm{Cos} x^7 dx = \frac{1}{9} . \mathrm{Sin}\, x^3 . \mathrm{Cos}\, x^6 + \frac{6}{9} . \int \mathrm{Sin}\, x^2 . \mathrm{Cos}\, x^5 dx$

$(\odot) \int \mathrm{Sin} x^2 . \mathrm{Cos} x^5 dx = -\frac{1}{7} . \mathrm{Cos}\, x^6 . \mathrm{Sin}\, x + \frac{1}{7} . \int \mathrm{Cos}\, x^5\, dx.$

Das Integral von $\mathrm{Cos}\, x^5 dx$ findet man nach §. 318.

Ex. 3. Man sucht $\int \mathrm{Sin}\, x^5 . \mathrm{Cos}\, x^7 dx$.

Es ist nach

$(\odot) \int \mathrm{Sin} x^5 . \mathrm{Cos} x^7 dx = -\frac{1}{12} . \mathrm{Cos} x^8 . \mathrm{Sin} x^4 + \frac{4}{12} . \int \mathrm{Sin} x^3 . \mathrm{Cos} x^7 . dx$

$(☾) \int \mathrm{Sin} x^3 . \mathrm{Cos} x^7 dx = \frac{1}{10} . \mathrm{Sin}\, x^4 . \mathrm{Cos}\, x^6 + \frac{6}{10} . \int \mathrm{Sin}\, x^3 . \mathrm{Cos}\, x^5 dx$

$(\odot) \int \mathrm{Sin} x^3 . \mathrm{Cos} x^5 dx = -\frac{1}{8} . \mathrm{Cos}\, x^6 . \mathrm{Sin}\, x^2 + \frac{2}{8} . \int \mathrm{Sin}\, x . \mathrm{Cos}\, x^5 dx.$

Nun ist $\int \mathrm{Sin}\, x . \mathrm{Cos}\, x^5 dx = -\int \mathrm{Cos}\, x^5 . d\, \mathrm{Cos}\, x = -\frac{1}{6} . \mathrm{Cos}\, x^6.$

§. 322. Aufg. Man soll $\int \frac{\mathrm{Sin}\, x^m . dx}{\mathrm{Cos}\, x^n}$ finden.

Aufl. Setzt man $-n$ statt n in $(\odot)$, so erhält man

$$\int \frac{\mathrm{Sin} x^m dx}{\mathrm{Cos}\, x^n} = -\frac{\mathrm{Sin}\, x^{m-1}}{(m-n) . \mathrm{Cos} x^{n-1}} + \frac{m-1}{m-n} . \int \frac{\mathrm{Sin}\, x^{m-2} . dx}{\mathrm{Cos}\, x^n} . \quad (A.)$$

Aus ♀ §. 321. ergibt sich, wenn man $-n$ statt n setzt,

$$\int \frac{\mathrm{Sin}\, x^m dx}{\mathrm{Cos}\, x^n} = \frac{\mathrm{Sin}\, x^{m+1}}{(m-n) \mathrm{Cos} x^{n+1}} - \frac{n+1}{m-n} . \int \frac{\mathrm{Sin}\, x^m dx}{\mathrm{Cos}\, x^{n+2}} .$$

Hieraus findet man

$$\frac{n+1}{m-n} . \int \frac{\mathrm{Sin}\, x^m dx}{\mathrm{Cos}\, x^{n+2}} = \frac{\mathrm{Sin}\, x^{m+1}}{(m-n)\, \mathrm{Cos}\, x^{n+1}} - \int \frac{\mathrm{Sin}\, x^m dx}{\mathrm{Cos}\, x^n} .$$

Also ist

$$\int \frac{\mathrm{Sin}\, x^m dx}{\mathrm{Cos}\, x^{n+2}} = \frac{\mathrm{Sin}\, x^{m+1}}{(n+1)\, \mathrm{Cos}\, x^{n+1}} - \frac{m-n}{n+1} . \int \frac{\mathrm{Sin}\, x^m dx}{\mathrm{Cos}\, x^n} .$$

Man setze $m-2$ statt m und $n-2$ statt n. Hierdurch bekommt man

$$\int \frac{\mathrm{Sin}\, x^{m-2} dx}{\mathrm{Cos}\, x^n} = \frac{\mathrm{Sin}\, x^{m-1}}{(n-1)\, \mathrm{Cos}\, x^{n-1}} - \frac{m-n}{n-1} . \int \frac{\mathrm{Sin}\, x^{m-2} . dx}{\mathrm{Cos}\, x^{n-2}} . \quad (B)$$

Also ist aus (A.) und (B.)

$$\int \frac{\mathrm{Sin}\, x^m dx}{\mathrm{Cos}\, x^n} = -\frac{\mathrm{Sin}\, x^{m-1}}{(m-n) \mathrm{Cos}\, x^{n-1}} + \frac{m-1}{m-n} . \frac{1}{m-1} . \frac{\mathrm{Sin}\, x^{m-1}}{\mathrm{Cos}\, x^{n-1}}$$
$$- \frac{m-1}{n-1} . \int \frac{\mathrm{Sin}\, x^{m-2} . dx}{\mathrm{Cos}\, x^{n-2}} .$$

Nun kann seyn

I.) $m > n$, oder II.) $m < n$, oder III.) $m = n$.

I. Ist $m > n$, so kommt es darauf an, $\int \mathrm{Sin}\, x^r dx$ und $\int \frac{\mathrm{Sin}\, x^r dx}{\mathrm{Cos}\, x}$ zu finden: das erste, wenn n grade, und das zweite, wenn n ungrade ist.

II. Ist $m < n$, so muß man finden können $\int \frac{dx}{\mathrm{Cos}\, x^r}$ und $\int \frac{\mathrm{Sin}\, x\, dx}{\mathrm{Cos}\, x^r} = -\int \frac{d\, \mathrm{Cos}\, x}{\mathrm{Cos}\, x^r}$, das erste, wenn m grade, und das zweite, wenn n ungrade ist.

III. Ist $m = n$, so setze man zuerst in (B.) $m + 2$ statt m. Hierdurch erhält man

$$\int \frac{\mathrm{Sin}\, x^m dx}{\mathrm{Cos}\, x^n} = \frac{\mathrm{Sin}\, x^{m+1}}{(n-1)\, \mathrm{Cos}\, x^{n-1}} - \frac{m+2-n}{n-1} . \int \frac{\mathrm{Sin}\, x^m\, dx}{\mathrm{Cos}\, x^{n-2}} .$$

Alsdann $n - 2$ statt n. Hieraus ergibt sich

$$\int \frac{\mathrm{Sin}\, x^m dx}{\mathrm{Cos}\, x^{n-2}} = -\frac{\mathrm{Sin}\, x^{m-1}}{(m-n+2) . \mathrm{Cos}\, x^{n-3}} + \frac{m-1}{m-n+2} . \int \frac{\mathrm{Sin}\, x^{m-2} . dx}{\mathrm{Cos}\, x^{n-2}} .$$

Aus den beiden hier abgeleiteten Formeln findet man, wenn man $m = n$ setzt,

$$1)\ \int \frac{\mathrm{Sin}\, x^m dx}{\mathrm{Cos}\, x^m} = -\frac{\mathrm{Sin}\, x^{m+1}}{(m-1)\mathrm{Cos}\, x^{m-1}} - \frac{2}{m-1} . \int \frac{\mathrm{Sin}\, x^m dx}{\mathrm{Cos}\, x^{m-2}}$$

$$2)\ \int \frac{\mathrm{Sin}\, x^m dx}{\mathrm{Cos}\, x^{m-2}} = -\frac{\mathrm{Sin}\, x^{m-1}}{2 . \mathrm{Cos}\, x^{m-3}} + \frac{m-1}{2} . \int \frac{\mathrm{Sin}\, x^{m-2} . dx}{\mathrm{Cos}\, x^{m-2}} .$$

Bei Anwendung dieser Formeln kommt man, je nachdem m grade oder ungrade ist, auf $\int dx$, oder auf $\int \frac{\mathrm{Sin}\, x\, dx}{\mathrm{Cos}\, x}$ $= -\int \frac{d\, \mathrm{Cos}\, x}{\mathrm{Cos}\, x}$.

Nun kann man als bekannt annehmen

$\int \mathrm{Sin}\, x^r dx$ nach §. 317.

$\int \frac{dx}{\mathrm{Cos}\, x^r}$ nach §. 320.

$\int \frac{\mathrm{Sin}\, x\, dx}{\mathrm{Cos}\, x^r} = -\int \frac{d\, \mathrm{Cos}\, x}{\mathrm{Cos}\, x^r}$ nach §. 260.

$\int dx$ nach §. 260.

$-\int \frac{d\, \text{Cos}\, x}{\text{Cos}\, x}$ nach §. 260.

Man hat also noch $\int \frac{\text{Sin}\, x^r dx}{\text{Cos}\, x}$ zu suchen.

Man setze in A. §. 322. $n = 1$ und $m = r$, so bekommt man

$$\int \frac{\text{Sin}\, x^r dx}{\text{Cos}\, x} = -\frac{\text{Sin}\, x^{r-1}}{r-1} + \int \frac{\text{Sin}\, x^{r-2} \cdot dx}{\text{Cos}\, x}.$$

Man hat

$$\text{für } r = 0,\ \int \frac{dx}{\text{Cos}\, x} = \lg \frac{\sqrt{(1 + \text{Sin}\, x)}}{\sqrt{(1 - \text{Sin}\, x)}} \text{ (§. 320.)}$$

$$= 1,\ \int \frac{\text{Sin}\, x\, dx}{\text{Cos}\, x} = -\lg \text{Cos}\, x \text{ (§. 260.)}$$

$$= 2,\ \int \frac{\text{Sin}\, x^2 dx}{\text{Cos}\, x} = -\text{Sin}\, x + \int \frac{dx}{\text{Cos}\, x}$$

$$= 3,\ \int \frac{\text{Sin}\, x^3 dx}{\text{Cos}\, x} = -\tfrac{1}{2} \cdot \text{Sin}\, x^2 + \int \frac{\text{Sin}\, x\, dx}{\text{Cos}\, x}$$

$$= 4,\ \int \frac{\text{Sin}\, x^4 dx}{\text{Cos}\, x} = -\tfrac{1}{3} \cdot \text{Sin}\, x^3 + \int \frac{\text{Sin}\, x^2 dx}{\text{Cos}\, x}$$

$$= 5,\ \int \frac{\text{Sin}\, x^5 dx}{\text{Cos}\, x} = -\tfrac{1}{4} \cdot \text{Sin}\, x^4 + \int \frac{\text{Sin}\, x^3 dx}{\text{Cos}\, x}$$

u. s. w.

§. 323. Das Differential $\frac{\text{Cos}\, x^m dx}{\text{Sin}\, x^n}$ läßt sich auf die Form $\frac{\text{Sin}\, x^m dx}{\text{Cos}\, x^n}$ bringen. Setzt man nämlich $x = 90^0 - y$, so erhält man $\text{Sin}\, x = \text{Cos}\, y$, $\text{Cos}\, x = \text{Sin}\, y$, $dx = -dy$. Durch Substitution dieser Werthe in $\frac{\text{Cos}\, x^m dx}{\text{Sin}\, x^n}$ bekommt man

$$\int \frac{\text{Cos}\, x^m dx}{\text{Sin}\, x^n} = -\int \frac{\text{Sin}\, y^m dy}{\text{Cos}\, y^n}.$$

§. 324. Aufg. Man soll $\frac{dx}{\text{Sin}\, x^m . \text{Cos}\, x^n}$ integriren.

Aufl. Man setze in §. 321. (☉) und (♀) $-m$ statt m und $-n$ statt n. Hierdurch bekommt man

$$1) \int \frac{dx}{\mathrm{Sin}\,x^m \mathrm{Cos}\,x^n} = \frac{1}{m+n} \cdot \frac{1}{\mathrm{Cos}\,x^{n-1} . \mathrm{Sin}\,x^{m+1}} + \frac{m+1}{m+n} . \int \frac{dx}{\mathrm{Sin}\,x^{m+2} . \mathrm{Cos}\,x^n}$$

$$2) \int \frac{dx}{\mathrm{Sin}\,x^m \mathrm{Cos}\,x^n} = - \frac{1}{m+n} \cdot \frac{1}{\mathrm{Sin}\,x^{m-1} . \mathrm{Cos}\,x^{n+1}} + \frac{n+1}{m+n} . \int \frac{dx}{\mathrm{Sin}\,x^m . \mathrm{Cos}\,x^{n+2}} .$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich

$$\mathrm{I.} \int \frac{dx}{\mathrm{Sin}\,x^{m+2} . \mathrm{Cos}\,x^n} = - \frac{1}{m+1} \cdot \frac{1}{\mathrm{Cos}\,x^{n-1} . \mathrm{Sin}\,x^{m+1}} + \frac{m+n}{m+1} . \int \frac{dx}{\mathrm{Sin}\,x^m . \mathrm{Cos}\,x^n}$$

$$\mathrm{II.} \int \frac{dx}{\mathrm{Sin}\,x^m . \mathrm{Cos}\,x^{n+2}} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{\mathrm{Sin}\,x^{m-1} . \mathrm{Cos}\,x^{n+1}} + \frac{m+n}{n+1} . \int \frac{dx}{\mathrm{Sin}\,x^m \mathrm{Cos}\,x^n} .$$

Setzt man nun in I. $m-2$ statt m, und in II. $m-2$ statt m und $n-2$ statt n, so bekommt man

$$\alpha) \int \frac{dx}{\mathrm{Sin}\,x^m . \mathrm{Cos}\,x^n} = - \frac{1}{m-1} \cdot \frac{1}{\mathrm{Cos}\,x^{n-1} . \mathrm{Sin}\,x^{m-1}} + \frac{m+n-2}{m-1} . \int \frac{dx}{\mathrm{Sin}\,x^{m-2} . \mathrm{Cos}\,x^n}$$

$$\beta) \int \frac{dx}{\mathrm{Sin}\,x^{m-2} . \mathrm{Cos}\,x^n} = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{\mathrm{Sin}\,x^{m-3} . \mathrm{Cos}\,x^{n-1}} + \frac{m+n-4}{n-1} . \int \frac{dx}{\mathrm{Sin}\,x^{m-2} . \mathrm{Cos}\,x^{n-2}}$$

Nun sey

Erstens $m < n$. Ist in diesem Falle

1) m grade, so kommt man auf das $\int \frac{dx}{\mathrm{Cos}\,x^r}$. (§. 320.) Und ist

2) m ungrade, so hat man nach §. 324. β.

$$\int \frac{dx}{\mathrm{Sin}\,x . \mathrm{Cos}\,x^r} = \frac{1}{r-1} \cdot \frac{1}{\mathrm{Cos}\,x^{r-1}} + \int \frac{dx}{\mathrm{Sin}\,x . \mathrm{Cos}\,x^{r-2}} .$$

Durch diese Formel wird man geführt auf $\frac{dx}{\mathrm{Sin}\,x}$, wenn r grade, und auf $\frac{dx}{\mathrm{Sin}\,x . \mathrm{Cos}\,x}$, wenn r ungrade ist.

Es sey

Zweitens $n < m$. Ist hier

1) n grade, so kommt man auf $\int \frac{dx}{\mathrm{Sin}\,x^r}$. Und ist

2) n ungrade, so hat man durch die Formel §. 324. α.

$$\int \frac{dx}{\mathrm{Sin}\,x^r . \mathrm{Cos}\,x} = - \frac{1}{r-1} \cdot \frac{1}{\mathrm{Sin}\,x^{r-1}} + \int \frac{dx}{\mathrm{Sin}\,x^{r-2} . \mathrm{Cos}\,x} .$$

Durch diese Formel wird man geführt, entweder auf $\int \frac{dx}{\mathrm{Cos}\,x}$, oder auf $\int \frac{dx}{\mathrm{Sin}\,x . \mathrm{Cos}\,x}$.

Es sey

Drittens $m = n$. In diesem Falle kommt man entweder auf $\int dx$, oder auf $\int \frac{dx}{\text{Sin}\,x\,.\,\text{Cos}\,x}$.

§. 325. Aufg. Man soll $\int \frac{dx}{\text{Sin}\,x\,.\,\text{Cos}\,x}$ finden.

Aufl. Es ist $\int \frac{dx}{\text{Sin}\,x.\text{Cos}\,x} = \int \frac{(\text{Sin}\,x^2 + \text{Cos}\,x^2)\,dx}{\text{Sin}\,x\,.\,\text{Cos}\,x}$

$= \int \frac{\text{Sin}\,x.dx}{\text{Cos}\,x} + \int \frac{\text{Cos}\,x\,dx}{\text{Sin}\,x} = -\int \frac{d\,\text{Cos}\,x}{\text{Cos}\,x} + \int \frac{d\,\text{Sin}\,x}{\text{Sin}\,x}$

$= \lg \text{Sin}\,x - \lg \text{Cos}\,x = \lg \frac{\text{Sin}\,x}{\text{Cos}\,x} = \lg \text{Tg}\,x.$

§. 326. Aufg. Man soll $\frac{dx}{(\text{Cos}\,nx)^2}$, $\frac{dx}{(\text{Sin}\,nx)^2}$, $\frac{\text{Sin}\,nx\,.\,dx}{(\text{Cos}\,nx)^2}$ integriren.

Aufl. Man setze $nx = y$, also $dx = \frac{1}{n}dy$. Hierdurch erhält man statt der gegebenen Differentiale folgende:

$$\frac{1}{n}.\frac{dy}{\text{Cos}\,y^2},\ \frac{1}{n}.\frac{dy}{\text{Sin}\,y^2},\ \frac{1}{n}.\frac{\text{Sin}\,y\,.\,dy}{\text{Cos}\,y^2},$$

die sich nach §. 319. 320. oder nach §. 322. integriren lassen.

§. 327. Aufg. Man soll $\int x^n dx\,.\,\text{arc. Sin}\,x$ suchen.

Aufl. Wenn u und v Funktionen von x bedeuten, so ist

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.\ (\odot)$$

Man setze $u = \text{arc. Sin}\,x$, und $dv = x^n dx$;

$$\text{also } du = d\,\text{arc. Sin}\,x = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

$$\text{und } v = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Durch Substitution dieser Werthe bekommt man

$$\int x^n dx\,.\,\text{arc. Sin}\,x = \frac{x^{n+1}}{n+1}\,.\,\text{arc. Sin}\,x - \frac{1}{n+1}\,.\int \frac{x^{n+1}\,.\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}}.$$

§. 328. Allgemeiner heißt die vorige Aufgabe: Man soll $\int X\,dx\,.\,\text{arc. Sin}\,x$ finden.

Man setze hier $u = \text{arc. Sin}\, x$,

$$\text{also } du = \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)}}.$$

Man setze ferner

$$dv = X\, dx$$

$$\text{und } v = \int X\, dx = V.$$

Durch Substitution dieser Werthe in die Formel (⊙) bekommt man

$$\int X\, dx \,.\, \text{arc. Sin}\, x = V \,.\, \text{arc. Sin}\, x - \int V \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)}}.$$

Die Integration der Formel $X\, dx \,.\, \text{arc. Sin}\, x$ hangt also von der Integration einer algebraischen Größe ab, wenn V algebraisch ist.

§. 329. Auf eine ähnliche Art findet man

$$\int x^n dx \,.\, \text{arc. Cos}\, x, \text{ und } \int x^n dx \,.\, \text{arc. Tg}\, x.$$

Auch lassen sich diese Aufgaben, wie die in §. 327. verallgemeinern. (§. 328.)

Viertes Kapitel.

Integration der höhern Differentiale der Funktionen von Einer veränderlichen Größe.

§. 330. Man erinnere sich, daß das nte Differential aus der Differentiation des $n - 1$ten, das $n - 1$te aus der Differentiation des $n - 2$ten, das $n - 2$te aus der Differentiation des $n - 3$ten, u. s. w., das zweite aus der Differentiation des ersten und das erste aus der Differentiation der ursprünglichen Funktion der veränderlichen Größe x entstanden ist; daß ferner, bei der Ableitung der höhern Differentiale, dx als unveränderlich angenommen wurde und bei jeder Differentiation beständige Größen weggefallen seyn können. Diese Bemerkungen festhaltend, wird man einsehen, daß man, nach den bisher für die Integration gegebenen Vorschriften, das nte Differential zurückführen muß auf das $n - 1$te, das $n - 1$te auf das

n — 2te, u. s. w., das zweite auf das erste, und das erste auf die ursprüngliche Funktion. Es sey z. B. zu integriren

$$d^3y = [24 . ax + 6 . b] . dx^3.$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich sogleich

$$d\frac{d^2y}{dx^2} = [24 . ax + 6 . b] . dx$$
$$= 24 . ax\,dx + 6 . b\,dx.$$

Durch Integration nach den früher gegebenen Vorschriften findet man hieraus

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12 . ax^2 + 6 . bx + C.$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich

$$d\frac{dy}{dx} = 12 . ax^2dx + 6 . bx\,dx + C\,dx.$$

Durch Integration dieser Gleichung erhält man

$$\frac{dy}{dx} = 4ax^3 + 3 . bx^2 + Cx + C'.$$

Also ist auch

$$dy = 4ax^3dx + 3 . bx^2dx + Cx\,dx + C'dx$$

und folglich

$$y = ax^4 + bx^3 + \tfrac{1}{2}Cx^2 + C'x + C''.$$

Fünftes Kapitel.

Von der Integration der Differentialgleichungen mit zwei veränderlichen Größen.

§. 331. Eine Differentialgleichung mit zwei veränderlichen Größen, in welcher die Differentiale nur auf der ersten Potenz vorkommen, ist unter einer von den Formen

$$P\,dx + Q\,dy = dZ,$$

und $P\,dx + Q\,dy = 0$ begriffen.

Sowohl P, als Q kann in jeder dieser Formen x und y enthalten.

§. 332. Erkl. Kommt in einer Differentialgleichung mit zwei veränderlichen Größen x und y das x mit dy, und das y mit dx multiplicirt vor, so heißen die veränderlichen Größen **ungesondert**. Sie heißen **gesondert**, wenn jede von ihnen nur mit ihrem Differential multiplicirt vorkommt. Ungesondert sind die Größen x und y z. B. in der Gleichung $2yx\,dx + x^2dy = 0$ und gesondert in der Gleichung $2 \cdot \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0$.

§. 333. In manchen Fällen lassen sich die ungesonderten Größen einer Differentialgleichung sondern. Dividirt man z. B. die Gleichung

$$2yx\,dx + x^2dy = 0$$

durch x^2y, so erhält man

$$2 \cdot \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0.$$

§. 334. Eine Differentialgleichung, in welcher die veränderlichen Größen gesondert sind, hat die Form

$$X\,dx + Y\,dy = dZ$$

oder

$$X\,dx + Y\,dy = 0,$$

wo X nur die veränderliche Größe x, und Y nur die veränderliche Größe y enthält.

§. 335. Sind die veränderlichen Größen einer Differentialgleichung gesondert, so läßt sie sich nach den frühern Regeln integriren. Es ist nämlich

$$\int X\,dx + \int Y\,dy + C = Z$$

oder

$$\int X\,dx + \int Y\,dy = C$$

und $\int X dx$ sowohl, als $\int Y dy$ läßt sich nach den früher gegebenen Vorschriften finden.

§. 336. Nach §. 239. ist eine Differentialgleichung mit zwei veränderlichen Größen x und y entweder vollständig, oder

unvollständig. Auch sind daselbst die Kennzeichen ihrer Vollständigkeit, oder Unvollständigkeit angegeben.

Eine vollständige Differentialgleichung läßt sich integriren.

§. 337. Aufg. Man soll das Differential

$$P\,dx + Q\,dy$$

integriren, wenn es vollständig ist.

Aufl. Ist der Ausdruck $P\,dx + Q\,dy$ ein vollständiges Differential, so ist er durch bloße Differentiation einer Funktion von zwei veränderlichen Größen, oder einer Gleichung zwischen zwei veränderlichen Größen x und y entstanden. Das Differential einer solchen Funktion oder Gleichung, die V heißen mag, entsteht aber dadurch, daß man sie zuerst so differentiirt, als sey nur x veränderlich (dadurch erhält man $P\,dx$), und alsdann so, als sey nur y veränderlich (man bekommt dadurch $Q\,dy$), und daß man endlich beide Resultate addirt. Bei der Differentiation unter der Voraussetzung, daß y beständig und nur x veränderlich sey, sind aus der Gleichung oder Funktion V alle Glieder, die kein x enthalten, weggefallen. Die weggefallenen Glieder sind entweder eine bloße beständige Größe, oder, in beständige Größen multiplicirte, Potenzen von y, oder beides zusammen. Integrirt man nun den Theil $P\,dx$ des gegebenen Differentials, als sey nur x veränderlich, so werden alle Glieder der Gleichung oder Funktion V, die x enthielten, wiederhergestellt, und es fehlen an derselben nur noch die, welche bei der Differentiation der Funktion oder Gleichung V unter der Voraussetzung, daß nur x veränderlich wäre, weggefallen sind. Bezeichnet man also die weggefallenen Glieder durch Y, welches also eine bloße beständige Größe, oder, in beständige Größen multiplicirte, Potenzen von y, oder beides zusammen bedeuten kann, so ist

$$\int P\,dx + Y$$

der Funktion oder Gleichung V gleich.

Man differentiire $\int P\,dx + Y$ als seyen x und y veränderlich.

Wenn man differentiirt, als sey bloß x veränderlich, so erhält man $P\,dx$.

Was man bekommt, wenn man differentiirt, als sey bloß y veränderlich, sey ausgedrückt durch $R\,dy + dY$.

Differentiirt man also $\int P\,dx + Y$, als seyen x und y veränderlich, so erhält man

$$P\,dx + R\,dy + dY.$$

Da nun $\int P\,dx + Y$ der Gleichung oder Funktion V gleich ist, so muß auch seyn

$$P\,dx + Q\,dy = P\,dx + R\,dy + dY.$$

Also ist

$$Q\,dy = R\,dy + dY$$
$$dY = (Q - R)\,dy$$
$$\text{und } Y = \int (Q - R)\,dy.$$

Folglich

$$\int [P\,dx + Q\,dy] = \int P\,dx + Y,$$
$$= \int P\,dx + \int (Q - R)\,dy.$$

Hier kann $Q - R$ kein x enthalten, da Y keins enthält. Also läßt sich $(Q - R)\,dy$ integriren. Der Ausdruck $\int P\,dx$ wird integrirt, als sey nur x veränderlich. Folglich läßt sich das Integral von $P\,dx + Q\,dy$ finden.

Regel: Man integrire $P\,dx + Q\,dy$ so, als sey nur x veränderlich, zu dem gefundenen partiellen Integral $\int P\,dx$ setze man die Ergänzung Y, was man hierdurch erhält, differentiire man, als seyen x und y veränderlich, man bestimme ferner aus der Gleichsetzung des hier gefundenen und des gegebenen Differentials die Größe Y, und füge endlich das bestimmte Y zu dem partiellen Integral $\int P\,dx$.

Ex. 1. Es sey gegeben

$$y^2 x\,dx + x^2 y\,dy = dz.$$

Hier ist $P = y^2 x$ und $Q = x^2 y$;

$$\text{also } \frac{dP}{dy} = 2yx \text{ und } \frac{dQ}{dx} = 2xy;$$

folglich das gegebene Differential vollständig (§. 239.).

Nun ist

$$\int P\,dx = \int y^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}y^2x^2.$$

Also

$$\int P\,dx + Y = \tfrac{1}{2}y^2x^2 + Y,$$

$$P\,dx + R\,dy + dY = y^2x\,dx + yx^2dy + dY.$$

Letzteres ist auch dem gegebenen Differential gleich. Man hat also

$$y^2x\,dx + x^2y\,dy = y^2x\,dx + yx^2dy + dY.$$

Also ist $dY = 0$, oder Y eine beständige Größe. Folglich ist

$$z = \tfrac{1}{2}y^2x^2 + C.$$

Ex. 2. Es sey gegeben $dZ = \frac{dx}{a-y} + \frac{(a+x)dy}{(a-y)^2}$.

Hier ist $P = \frac{1}{a-y}$, und $Q = \frac{a+x}{(a-y)^2}$

$$\frac{dP}{dy} = \frac{1}{(a-y)^2} \text{ und } \frac{dQ}{dx} = \frac{1}{(a-y)^2};$$

also die gegebene Gleichung vollständig.

Nun ist

$$\int P\,dx = \frac{x}{a-y},$$

$$\int P\,dx + Y = \frac{x}{a-y} + Y.$$

Differentiirt man diesen Ausdruck, als seyen x und y veränderlich, so erhält man

$$P\,dx + R\,dy + dY = \frac{dx}{a-y} + \frac{x\,.\,dy}{(a-y)^2} + dY.$$

$$\text{Also ist } R = \frac{x}{(a-y)^2}.$$

Folglich, da $Q = \frac{a+x}{(a-y)^2}$ ist, so ist

$$dY = \left[\frac{a+x}{(a-y)^2} - \frac{x}{(a-y)^2}\right].\,dy$$

$$= \frac{a}{(a-y)^2}.\,dy.$$

Hieraus ergibt sich

$$Y = \frac{a}{a-y}.$$

Da nun $\int P\,dx = \frac{x}{a-y}$ ist, so erhält man

$$Z = \frac{x}{a-y} + \frac{a}{a-y} + C$$
$$= \frac{a+x}{a-y} + C.$$

A. Absonderung der in einer Differentialgleichung enthaltenen zwei veränderlichen Größen.

§. 338. Aufg. Wenn in einer Differentialgleichung, die gleich Null ist, das Differential dx in eine Funktion bloß von y, und das Differential dy in eine Funktion bloß von x multiplicirt ist, die veränderlichen Größen abzusondern.

Aufl. Die gegebene Differentialgleichung läßt sich darstellen durch

$$Y\,dx + X\,dy = 0,$$

wo Y eine Funktion bloß von y, und X eine Funktion bloß von x ist. Man dividire die Gleichung durch das Produkt $Y.X$. Hierdurch erhält man die Gleichung

$$\frac{dx}{X} + \frac{dy}{Y} = 0.$$

In ihr sind die veränderlichen Größen x und y von einander abgesondert.

Ex. Es sey $\sqrt{(1-y^2)}\,dx - (1+x^2)\,dy = 0$.

Dividirt man hier durch das Produkt $(1+x^2).\sqrt{(1-y^2)}$, so erhält man

$$\frac{dx}{1+x^2} - \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)}} = 0.$$

Das Integral hiervon ist

$$\text{arc. Tg}\,x - \text{arc. Sin}\,y = C,$$

oder, wenn es für $x = 0$, und $y = 0$ verschwinden soll,

$$\text{arc. Tg}\, x - \text{arc. Sin}\, y = 0.$$

Also $\text{arc. Tg}\, x = \text{arc. Sin}\, y$.

Aus der Gleichheit des Bogens der Tangente x und des Bogens des Sinus y ergibt sich nun weiter

$$\sqrt{(1-y^2)} : y = 1 : x$$

$$\text{und } x = \frac{y}{\sqrt{(1-y^2)}}.$$

§. 339. Aufg. Wenn in der Gleichung $XY dx + X'Y'dy = 0$ das X und X' Funktionen von x, und das Y und Y' Funktionen von y bedeuten, die veränderlichen Größen von einander abzusondern.

Aufl. Man dividire durch $Y . X'$, so erhält man

$$\frac{X}{X'} . dx + \frac{Y'}{Y} . dy = 0.$$

Ex. Es sey $x^2 y\, dx + (3y+1) \sqrt{x^3} . dy = 0$.

Dividirt man hier durch $y . \sqrt{x^3}$, so bekommt man

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^3}} dx + \frac{3y+1}{y} dy = 0.$$

§. 340. Aufg. In der Gleichung $dy + Py\,dx = Q\,dx$ bedeuten P und Q Funktionen bloß von x; man soll die veränderlichen Größen x und y von einander absondern.

Aufl. Man setze $y = Xu$, wo X eine beliebige Funktion von x ist und u eine beliebige veränderliche Größe bedeutet; also

$$dy = X\,du + u\,dX.$$

Substituirt man für y und dy ihre Werthe in die gegebene Gleichung, so erhält man

$$X\,du + u\,dX + PXu\,dx = Q\,dx$$

$$\text{oder } X\,du + u\,(dX + PX\,dx) = Q\,dx. \text{ (J.)}$$

Da X eine beliebige Funktion von x ist, so kann es auch eine Funktion von x seyn, die so beschaffen ist, daß

$$dX + PX\,dx = 0$$

wird.

Ist aber

$$dX + PX\,dx = 0,$$

so ist

$$1)\ \frac{dX}{X} = -P\,dx$$

$$\text{und } 2)\ X\,du = Q\,dx$$

$$\text{oder } du = \frac{Q\,dx}{X}\ \text{(K.)}$$

Nun erhält man aus

$$\frac{dX}{X} = -P\,dx,$$

$$\lg X = -\int P\,dx,$$

oder, wenn e die Basis des natürlichen Logarithmensystems ist,

$$\lg X = \lg e^{-\int P dx},$$

$$\text{oder } X = e^{-\int P\,dx}.$$

Hieraus und aus (K.) ergibt sich ferner

$$du = \frac{Q\,dx}{e^{-\int P\,dx}} = e^{\int P\,dx} \cdot Q\,dx.$$

Folglich ist

$$u = \int e^{\int P\,dx} \cdot Q\,dx + C.$$

Folglich, [da $y = Xu$

$$X = e^{-\int P\,dx}$$

$$u = \int e^{\int P\,dx} \cdot Q\,dx],$$

$$y = e^{-\int P\,dx} \cdot [\int e^{\int P\,dx} \cdot Q\,dx + C].$$

Ex. Es sey $dy + y\,dx = ax^n dx$.

Hier ist $P = 1$, $Q = ax^n$, $\int P\,dx = x$, und $y = e^{-x} \cdot [\int e^x \cdot ax^n dx + C]$.

Nach §. 307. Ex. 2. ist

$$\int e^x x^n dx = x^n e^x - n \cdot x^{n-1} e^x + n(n-1)\,x^{n-2} e^x - \ldots$$

Also ist

$$\int e^x \cdot ax^n dx + C = ae^x [x^n - nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} - \ldots] + C.$$

Folglich ist

$$y = a\,[x^n - nx^{n-1} + n\,(n-1)\,x^{n-2} - \ldots] + Ce^{-x}.$$

§. 341. Die Differentialgleichung

$$dy + Py\,dx = Qy^{n+1}dx,$$

wo P und Q Funktionen bloß von x sind, läßt sich auf die Form $dy + Py\,dx = Q\,dx$ bringen. Denn man dividire die Gleichung durch y. Man erhält hierdurch

$$\frac{dy}{y} + P\,dx = Qy^n dx. \quad (\odot)$$

Setzt man nun $\frac{1}{y^n} = z$, so ist

$$-ny^{-n-1}dy = dz$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dz}{nz}.$$

Durch Setzung der Werthe für $\frac{dy}{y}$ und y^n in $(\odot)$ erhält man

$$-\frac{dz}{nz} + P\,dx = \frac{Q\,.\,dx}{z}.$$

Hieraus ergibt sich

$$-dz + nPz\,dx = nQ\,dx$$

$$\text{oder } dz - nPz\,dx = -nQ\,dx.$$

§. 342. Aufg. Man soll die veränderlichen Größen der Gleichung

$$(ax^m + bx^{m-f}y^f + cx^{m-g}y^g + \ldots)dx + (\alpha x^m + \beta x^{m-\varphi}y^\varphi + \gamma x^{m-\varepsilon}y^\varepsilon + \ldots)dy = 0,$$

in welcher die in dx und dy multiplicirten Funktionen gleichartig sind, d. i. in welcher die Summe der Exponenten der veränderlichen Größen x und y in jedem Gliede gleich ist, von einander absondern.

Aufl. Aus der gegebenen Gleichung folgt

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{ax^m + bx^{m-f}y^f + cx^{m-g}y^g + \ldots}{\alpha x^m + \beta x^{m-\varphi}y^\varphi + \gamma x^{m-\varepsilon}y^\varepsilon + \ldots}$$

Man setze $y = xz$, also $dy = x\,dz + z\,dx$.

Substituirt man diese Werthe und dividirt den Zähler und Nenner des Bruchs auf der rechten Seite der durch die Substitution erhaltenen Gleichung durch x^m, so erhält man

$$\frac{x\,dz + z\,dx}{dx} = -\frac{a + bz^f + cz^g + \ldots}{\alpha + \beta z^\varphi + \gamma z^\varepsilon + \ldots},$$

Setzt man, was auf der rechten Seite dieser Gleichung steht, $= Z$, so hat man

$$x\,dz + z\,dx = Z \,.\, dx,$$

$$\text{also } x\,dz = (Z - z)\,dx$$

$$\text{und } \frac{dx}{x} = \frac{dz}{Z - z}.$$

$$\text{Folglich } \lg x = \int \frac{dz}{Z - z}.$$

Ist $\int \frac{dz}{Z - z}$ gefunden, so kann man statt z seinen Werth $\frac{y}{x}$ setzen. Man erhält dadurch eine Gleichung zwischen x und y.

Ex. Es sey $(ax + by)\,dx - (\alpha x + \beta y)\,dy = 0$.

Hier ist $\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by}{\alpha x + \beta y}$, und man findet, wenn $y = xz$ gesetzt wird,

$$Z = \frac{a + bz}{\alpha + \beta z},$$

$$Z - z = \frac{a + (b - \alpha)\,z - \beta z^2}{\alpha + \beta z},$$

$$\text{und } \frac{dx}{x} = \frac{(\alpha + \beta z)\,dz}{a + (b - \alpha)\,z - \beta z^2}.$$

Der Bruch $\frac{(\alpha + \beta z)\,dz}{a + (b - \alpha)\,z - \beta z^2}$ läßt sich zerlegen in $\frac{(\beta z + \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}b)\,dz}{a + (b - \alpha)\,z - \beta z^2} + \frac{(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}b)\,dz}{a + (b - \alpha)\,z - \beta z^2}$.

Man setze $\beta z + \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}b = u$, also

$$dz = \frac{du}{\beta}, \text{ und } z = \frac{u + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}\alpha}{\beta}.$$

Durch Substitution ergibt sich aus dem Ausdruck $\frac{(\beta z + \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}b)\,dz}{a + (b - \alpha)\,z - \beta z^2}$ der folgende $\frac{u\,du}{a\beta + \frac{1}{4}(b - \alpha)^2 - u^2}$.

Dieser läßt sich nach §. 260. IX. integriren, und man erhält, wenn man nach der Integration für u seinen Werth setzt,

$$\int\frac{(\beta z + \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}b)dz}{a + (b - \alpha)z - \beta z^2} = -\tfrac{1}{2}lg\,[a + (b - \alpha)z - \beta z^2].$$

Man hat also

$$lg\,x = C - \tfrac{1}{2}.lg[a + (b - \alpha)z - \beta z^2] + \tfrac{1}{2}(\alpha + b).\int\frac{dz}{a + (b - \alpha)z - \beta z^2}.$$

§. 343. Erkl. Eine Differentialgleichung $P\,dx + Q\,dy = 0$, in welcher P und Q gleichartige Funktionen von x und y sind, heißt eine gleichartige Differentialgleichung von zwei veränderlichen Größen.

§. 344. Da sich in der Differentialgleichung $P\,dx + Q\,dy = 0$, wenn sie gleichartig ist, die veränderlichen Größen x und y von einander absondern lassen, so sucht man oft Gleichungen, die nicht gleichartig sind, wo möglich gleichartig zu machen.

§. 345. Aufg. Die Differential-Gleichung $P\,dx + Q\,dy = 0$, in welcher P und Q nicht gleichartige Funktionen von x und y sind, wo möglich gleichartig zu machen.

Aufl. Man setze $y = z^n$, also $dy = nz^{n-1}dz$, und suche nun n so zu bestimmen, daß man eine gleichartige Differentialgleichung zwischen x und z erhält.

Ex. Es sey

$$(a - xy + x^2y^2)\,dx - x^4y^2dy = 0.$$

Setzt man $y = z^n$, also $dy = nz^{n-1}dz$, so erhält man

$$(a - xz^n + x^2z^{2n})\,dx - nx^4z^{2n}z^{n-1}dz = 0.$$

Da nun $a = ax^0$ ist, so muß, wenn die Gleichung gleichartig werden soll, seyn

$$0 = n + 1 = 2n + 2 = 4 + 2n + n - 1.$$

Diese Bedingung wird erfüllt, wenn man $n = -1$ setzt.

Setzt man also $n = -1$, so ist $y = z^{-1}$, und die gegebene Gleichung verwandelt sich in

$$(a - x \,.\, z^{-1} + x^2 z^{-2})\, dx + x^4 z^{-2} z^{-2} \,.\, dz = 0,$$

oder, wenn man mit z^4 multiplicirt, in

$$(az^4 - xz^3 + x^2 z^2)\, dx + x^4 dz = 0.$$

B. Vervollständigung eines unvollständigen Differentials mit zwei veränderlichen Grössen x und y durch Einführung eines neuen Faktors.

§. 346. Lehrs. Wenn bei einer gegebenen Differentialgleichung $P\,dx + Q\,dy = 0$ nicht $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$ ist, d. i., wenn die Gleichung nicht vollständig ist, so muß es allemal einen gewissen Faktor geben, durch den sie vollständig wird.

Bew. Der Differentialgleichung $P\,dx + Q\,dy = 0$ muß eine Integralgleichung mit zwei veränderlichen Größen x und y, die auf der einen Seite bloß eine beständige Größe hat, zu Grunde liegen. Diese Integralgleichung gebe durch bloße Differentiation

$$M\,dx + N\,dy = 0,$$

wo M von P und N von Q verschieden ist.

Hier muß also

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$$

seyn.

Nun folgt aus

$$M\,dx + N\,dy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M}{N} \;(☉)$$

und aus $P\,dx + Q\,dy = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P}{Q}. \;(☾)$$

Da nun das Verhältniß von dx zu dy in (⊙) und (☾) einerlei seyn muß, so erhält man

$$\frac{M}{N} = \frac{P}{Q}.$$

Also ist $M = L \,.\, P$
und $N = L \,.\, Q$.

§. 347. Aufg. Man soll den Faktor finden, durch dessen Einführung ein unvollständiges Differential $P\,dx + Q\,dy = 0$ vollständig wird.

Aufl. Man setze, das unvollständige Differential $P\,dx + Q\,dy = 0$ werde vollständig, wenn man es mit dem Faktor L multiplicirt. Alsdann ergibt sich aus der vollständigen Differentialgleichung

$$LP\,dx + LQ\,dy = 0,$$

$$\frac{dLP}{dy} = \frac{dLQ}{dx},$$

$$\text{oder } \frac{PdL}{dy} + \frac{LdP}{dy} = \frac{QdL}{dx} + \frac{LdQ}{dx}.$$

Man heiße V, sowohl, was auf der linken, als was auf der rechten Seite dieser Gleichung steht.

Man hat hiernach

$$1) \; \frac{PdL}{dy} + \frac{LdP}{dy} = V,$$

also $P \,.\, dL + L \,.\, dP = V\,dy$,

oder, weil L und P so differentiirt gedacht werden, als sey nur y veränderlich,

$$P \,.\, \frac{dL}{dy} dy + L \,.\, \frac{dP}{dy} dy = V\,dy.$$

Also ist

$$\frac{dL}{dy} dy = \frac{Vdy}{P} - \frac{L}{P} \,.\, \frac{dP}{dy} dy$$

$$\text{und } \frac{\frac{dL}{dy} dy}{L} = \frac{Vdy}{LP} - \frac{\frac{dP}{dy} dy}{P}.$$

Man hat

$$2)\ \frac{QdL}{dx} + \frac{LdQ}{dx} = V.$$

Hieraus leitet man ab, wie in 1.,

$$\frac{\frac{dL}{dx}dx}{L} = \frac{V\,dx}{QL} - \frac{\frac{dQ}{dx}dx}{Q}.$$

Man addire das in 1. und 2. Gefundene. Man erhält so

$$\frac{\frac{dL}{dx}dx + \frac{dL}{dy}dy}{L} = \frac{Vdx}{QL} + \frac{Vdy}{PL} - \frac{\frac{dQ}{dx}dx}{Q} - \frac{\frac{dP}{dy}dy}{P}.\ (♀)$$

Nun ergibt sich aus $P\,dx + Q\,dy = 0$,

$$Q = -\frac{P\,dx}{dy}.$$

Substituirt man diesen Werth für Q in das erste Glied auf der rechten Seite der Gleichung (♀), so erhält man

$$\frac{\frac{dL}{dx}dx + \frac{dL}{dy}dy}{L} = -\frac{\frac{dQ}{dx}dx}{Q} - \frac{\frac{dP}{dy}dy}{P}.$$

Nun ist, wenn man L so differentiirt, als seyen x und y veränderlich,

$$dL = \frac{dL}{dx}dx + \frac{dL}{dy}dy.$$

Man hat also

$$\frac{dL}{L} = -\frac{\frac{dQ}{dx}dx}{Q} - \frac{\frac{dP}{dy}dy}{P},$$

und hieraus endlich

$$\lg L = -\int\left[\frac{\frac{dQ}{dx}dx}{Q} + \frac{\frac{dP}{dy}dy}{P}\right].$$

Durch diese Formel findet man den Logarithmen des gesuchten Faktors. Der Faktor selbst ergibt sich, wenn man die zu dem Logarithmen gehörige Zahl nimmt.

§. 348. In den meisten Fällen hat es seine große Schwierigkeit, den Faktor L zu finden. Nur in einigen besondern wird er leicht gefunden. Hierher gehört vornehmlich der Fall, wenn L eine Funktion entweder bloß von x, oder bloß von y ist.

Aus der Gleichung

$$P\frac{dL}{dy} + L\frac{dP}{dy} = Q.\frac{dL}{dx} + L.\frac{dQ}{dx}$$

findet man nämlich, wenn L eine Funktion bloß von x, also $\frac{dL}{dy} = 0$ ist,

$$L \cdot \frac{dP}{dy} = Q \cdot \frac{dL}{dx} + L \cdot \frac{dQ}{dx},$$

$$L \cdot \left[\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right] = Q \cdot \frac{dL}{dx},$$

$$\frac{1}{Q} \cdot \left[\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right] dx = \frac{dL}{L}$$

und hieraus ergibt sich

$$\lg L = \int \frac{1}{Q} \cdot \left[\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right].$$

Also ist, wenn e die Basis des natürlichen Logarithmensystems bedeutet,

$$L = e^{\int \frac{1}{Q} \cdot \left[\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right] \cdot dx}.$$

Den Faktor L zu finden, kommt es also bloß darauf an, daß $\frac{1}{Q}\left[\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right]$ eine Funktion bloß von x sey.

Ex. Es sey $dy + Hy\,dx = J\,dx$, und H und J seyen Funktionen bloß von x. (§. 330.)

Es ist auch $dy + (Hy - J)\,dx = 0$. (♁)

Also ist $P = Hy - J$

$Q = 1$

$$\frac{1}{Q} \cdot \left[\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right] = H.$$

Folglich $L = e^{\int H dx}$.

Multiplicirt man mit diesem Werthe des Faktors L die Gleichung (♁), so bekommt man die vollständige Gleichung

$$e^{\int H dx} dy + (Hy - J)\, e^{\int H dx} dx = 0. \ (3)$$

Man integrire dieses Differential, als sey bloß y veränderlich, und füge X als Ergänzung bei (§. 327.). Man erhält so

$$e^{\int H dx} y + X.$$

Diese Größe differentiire man, als seyen x und y veränderlich (§. 327.). Man bekommt hierdurch

$$Hy e^{\int H dx} dx + e^{\int H dx} dy + dX.$$

Dieses dem Differential in (3) gleichgesetzt, gibt

$$(Hy - J)\, e^{\int H dx} \cdot dx = Hy e^{\int H dx} \cdot dx + dX.$$

Also ist $dX = -J \cdot e^{\int H dx} \cdot dx$

und $X = -\int J e^{\int H dx} \cdot dx$.

Durch Substitution dieses Werthes in $e^{\int H dx} y + X$ erhält man

$$e^{\int H dx} y - \int J e^{\int H dx} . dx = C.$$

Also ist

$$y = e^{-\int Hdx} . [\int J e^{\int Hdx} . dx + C]. \text{ (§. 330.)}$$

Sechstes Kapitel.

Integration der Differentialgleichungen von x und y durch Reihen.

§. 349. Aufg. Die Gleichung $dy + ydx - px^n dx = 0$ ist gegeben; man soll y durch eine Reihe ausdrükken, die nach den Potenzen von x fortschreitet.

Aufl. Aus der gegebenen Gleichung folgt

$$\frac{dy}{dx} + y - px^n = 0. \text{ (A.)}$$

Man nehme an, es sey

$$y = Ax^m + Bx^{m+\delta} + Cx^{m+2\delta} + \ldots$$

Hieraus folgt

$$\frac{dy}{dx} = mAx^{m-1} + (m+\delta)Bx^{m+\delta-1} + (m+2\delta)Cx^{m+2\delta-1} + \ldots$$

Durch Setzung der Reihen für y und $\frac{dy}{dx}$ in die Gleichung (A.) erhält man

$$\left.\begin{matrix} \frac{dy}{dx} \\ + y \\ - px^n \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} mAx^{m-1} + (m+\delta)Bx^{m+\delta-1} + (m+2\delta)Cx^{m+2\delta-1} + \ldots \\ Ax^m + \quad Bx^{m+\delta} + \quad Cx^{m+2\delta} + \ldots \\ - px^n \end{matrix}\right\} = 0. \text{ (B.)}$$

Man sieht nun wohl ohne Weiteres ein, daß die Particularreihen in (B.) eine Totalreihe werden müssen, wie die Particularreihen, von denen §. 106. — §. 132. die Rede gewesen ist, und daß sie es durch Anwendung der ebendaselbst gegebenen Vorschriften werden.

Man setze $m - 1 = n$, also $m = n + 1$. Hierdurch erhält man

$$\left.\begin{matrix} \frac{dy}{dx} \\ + y \\ - px^n \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} (n+1)Ax^n + (n+1+\delta)Bx^{n+\delta} + (n+1+2\delta)Cx^{n+2\delta} + \ldots \\ + \quad Ax^{n+1} \quad + \quad Bx^{n+1+\delta} \quad + \ldots \\ - px^n \end{matrix}\right\} = 0. \text{ (C.)}$$

Es fällt sogleich in die Augen, daß (C.) zu einer Totalreihe werde, wenn man $\delta = 1$ setzt.

Für $\delta = 1$ bekommt man aus (C.)

$$\left.\begin{array}{r}\frac{dy}{dx}\\ +y\\ -px^n\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}(n+1)Ax^n + (n+2)Bx^{n+1} + (n+3)Cx^{n+2} + \ldots\\ \qquad\qquad + Ax^{n+1} \qquad + \quad Cx^{n+2} + \ldots\\ -px^n\end{array}\right\} = 0.$$

Da nun hier seyn muß

1) $(n+1)A - p = 0$
2) $(n+2)B + A = 0$
3) $(n+3)C + B = 0$
. . . .

so findet man

$$A = \frac{p}{n+1}$$

$$B = -\frac{p}{(n+1)(n+2)}$$

$$C = \frac{p}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

. . . . . .

Also ist

$$y = \frac{p}{n+1}x^{n+1} - \frac{p}{(n+1)(n+2)}x^{n+2} + \frac{p}{(n+1)(n+2)(n+3)}x^{n+3} - \ldots$$

§. 350. Die Differentialgleichung $dy + y\,dx - px^n dx = 0$ kann als hergeleitet betrachtet werden aus einer Gleichung zwischen den Größen x und y, welche als Glied eine beliebige beständige Größe c enthalten hat. Diese beständige Größe ist bei der Differentiation weggefallen, und bei der Bestimmung der Reihe für y nicht, mitbestimmend, in diese Reihe eingetreten. Die Reihe für y ist also nicht vollständig. Durch folgendes Verfahren bekommt man eine Reihe für y, welche vollständig ist.

§. 351. Wenn man in der Gleichung $f(x, y, c) = 0$ statt x einen bestimmten Werth a setzt, so erhält auch y einen bestimmten Werth b. Die zusammengehörigen bestimmten Werthe a und b für x und y seyen gegeben.

Die Größe b werde zu $b + u$, wenn a zu $a + t$ wird, so daß also $y = b + u$ ist, wenn man $x = a + t$ setzt. Die Größen t und u sind unbestimmt. Setzt man $a + t$ und $b + u$ für x und y in die Gleichung $f(x, y, c) = 0$, so ist u eine Funktion von t. Durch Differentiation dieser Gleichung bekommt man dasselbe, was man erhält, wenn man $a + t$ statt x und $b + u$ statt y in die gegebene Gleichung $dy + y\,dx - px^n dx = 0$ setzt. Durch diese Setzung erhält man

$$du + (b + n)\,dt - p(a + t)^n dt = 0,$$

hieraus folgt

$$\frac{du}{dt} + b + u - p(a+t)^n = 0.$$

Das u drücke man in einer Reihe aus, die nach den Potenzen von t fortschreitet. Alle Glieder der Reihe für u müssen für t = 0 verschwinden, da für t = 0 auch u = 0 seyn muß.

Setzt man $u = At^m + Bt^{m+\delta} + Ct^{m+2\delta} + \ldots$

also

$$\frac{du}{dt} = mAt^{m-1} + (m+\delta)Bt^{m+\delta-1} + (m+2\delta)Ct^{m+2\delta-1} + \ldots$$

so erhält man

$$\left.\begin{array}{r} \frac{du}{dt} \\ +b \\ +u \\ -p(a+t)^n \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} mAt^{m-1} + (m+\delta)Bt^{m+\delta-1} + (m+2\delta)Ct^{m+2\delta-1} + \ldots \\ +b \\ +At^m + Bt^{m+\delta} + Ct^{m+2\delta} + \ldots \\ -pa^n - pna^{n-1}t - p\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}t^2 - \ldots \end{array}\right\} = 0.$$

Für $m - 1 = 0$ ergibt sich $m = 1$ und $\delta = 1$. Hieraus erhält man

$$\left.\begin{array}{r} \frac{du}{dt} \\ +b \\ +u \\ -p(a+t)^n \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} A + 2Bt + 3Ct^2 + \ldots \\ +b \\ +At + Bt^2 + \ldots \\ -pa^n - pna^{n-1}t - p\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}t^2 - \ldots \end{array}\right\} = 0.$$

Es ergibt sich hieraus

1) $A + b - pa^n = 0$

2) $2B + A - pna^{n-1} = 0$

3) $3C + B - p\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2} = 0$

. . . .

Folglich

$$A = pa^n - b$$

$$B = \frac{p(-a^n + na^{n-1}) + b}{1.2}$$

$$C = \frac{p[a^n - na^{n-1} + n(n-1)a^{n-2}] - b}{1.2.3}$$

. . . .

Demnach ist

$$u = (pa^n - b).t + \frac{p(-a^n + na^{n-1}) + b}{1.2}.t^2 + \frac{p[a^n - na^{n-1} + n(n-1)a^{n-2}] - b}{1.2.3}.t^3 + \ldots$$

Also hat man für $x = a + t$

$$y = b + u$$

$$= b + (pa^n - b).t + \frac{p(-a^n + na^{n-1}) + b}{1.2}.t^2 + \frac{p[a^n - na^{n-1} + n(n-1)a^{n-2}] - b}{1.2.3}.t^3 + \ldots$$

§. 352. Durch ein ähnliches Verfahren kann man auch Differentialgleichungen von x und y der zweiten Ordnung, d. h. Differentialgleichungen, die als höchste Potenz d^2x und d^2y enthalten, integriren.

Ex. Es sey $d^2y + px^n y dx^2 = 0$. Man setze $x = a + t$ und $y = b + u$, wo a und b zwei zusammengehörige bestimmte Werthe für x und y, und t und u unbestimmte Größen bedeuten.

Setzt man $a + t$ statt x und $b + u$ statt y in die gegebene Gleichung, so bekommt man $d^2u + p(a+t)^n.(b+u)dt^2 = 0$.

$$d^2u + pb(a+t)^n dt^2 + p(a+t)^n u dt^2 = 0.$$

Hieraus erhält man

$$\frac{d^2u}{dt^2} + pb(a+t)^n + p(a+t)^n.u = 0. \quad (\odot)$$

Man setze $u = At^m + Bt^{m+\delta} + Ct^{m+2\delta} + \ldots.$ (☾)

also

$$\frac{d^2u}{dt} = mAt^{m-1} + (m+\delta)Bt^{m+\delta-1} + (m+2\delta)Ct^{m+2\delta-1} + \ldots$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} = m(m-1)At^{m-2} + (m+\delta)(m+\delta-1)Bt^{m+\delta-2} + (m+2\delta)(m+2\delta-1)Ct^{m+2\delta-2} + \ldots$$

Durch Substitution dieser Gleichung in die Gleichung ($\odot$) und durch Entwickelung bekommt man

$$\left.\begin{array}{l}\frac{d^2u}{dt^2} \\ + pb(a+t)^n \\ + p(a+t)^n.u\end{array}\right\} =$$

$$\left\{\begin{array}{l} m(m-1)At^{m-2} + (m+\delta)(m+\delta-1)Bt^{m+\delta-2} + (m+2\delta)(m+2\delta-1)Ct^{m+2\delta-2} + \ldots \\ pba^n + npba^{n-1}t + \frac{n(n-1)}{1.2}pba^{n-2}t^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}pba^{n-3}t^3 + \ldots \\ [pa^n + npa^{n-1}t + \frac{n(n-1)}{1.2}pa^{n-2}t^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}pa^{n-3}t^3 + \ldots] \\ \times [At^m + Bt^{m+\delta} + Ct^{m+2\delta} + Dt^{m+3\delta} + \ldots] \end{array}\right\} = 0$$

Das m und δ müssen so bestimmt werden, daß in der Gleichung (C) für t = 0 auch u = 0 sey. Man setze also m = 2 und δ = 1, so ist

$$\frac{d^2u}{dt^2} + pb(a+t)^n + p(a+t)^n \cdot u = \left\{\begin{array}{l} 2.1A + 3.2Bt + 4.3Ct^2 + 5.4Dt^3 + 6.5Et^4 + \ldots \\ pba^n + npba^{n-1}t + \frac{n(n-1)}{1.2}pba^{n-2}t^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}pba^{n-3}t^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}pba^{n-4}t^4 + \ldots \\ \quad + pAa^nt^2 + npAa^{n-1}t^3 + \frac{n(n-1)}{1.2}pAa^{n-2}t^4 + \ldots \\ \quad + pBa^nt^3 + npBa^{n-1}t^4 + \ldots \\ \quad + pCa^nt^4 + \ldots \end{array}\right\} = 0.$$

Man hat also

$$1)\ 2\cdot 1A + pba^n = 0$$

$$2)\ 3\cdot 2B + npba^{n-1} = 0$$

$$3)\ 4\cdot 3C + \frac{n(n-1)}{1.2}pba^{n-2} + pAa^n = 0$$

$$4)\ 5\cdot 4D + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}pba^{n-3} + npAa^{n-1} + pBa^n = 0$$

$$5)\ 6\cdot 5E + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}pba^{n-4} + \frac{n(n-1)}{1.2}pAa^{n-2} + npBa^{n-1} + pCa^n = 0$$

. . . .

Hieraus ergibt sich:

$$1)\ A = -\frac{pba^n}{1.2}$$

$$2)\ B = -\frac{npba^{n-1}}{1.2.3}$$

$$3)\ C = -\frac{n(n-1)pba^{n-2} - p^2ba^{2n}}{1.2.3.4}$$

$$4)\ D = -\frac{n(n-1)(n-2)pba^{n-3} - 4np^2ba^{2n-1}}{1.2.3.4.5}$$

$$5)\ E = -\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)pba^{n-4} - [7n(n-1)+4n^2]p^2ba^{2n-2} + p^3ba^{3n}}{1.2.3.4.5.6}.$$

. . . .

Druckfehler.

Seite			Zeile	statt	setze
Seite 10	v. unten		4	$p - q$	$q - p$
» 25	»	»	» 12	» z	» x
» 26	»	»	» 8	» $(1 + x^n)$	» $(1 + x)^n$
» 33	»	»	» 3	» $-\frac{m}{n}\cdot\frac{u^{-m}}{u}$	» $-\frac{m}{n}\cdot\frac{u^{-m}}{u^n}$
» 44	» oben		» 8	» $\mathrm{Cos}\,(A \pm B)$	» $\mathrm{Cos}\,(A \mp B)$
» 71	» unten		» 12	» u	» n
» 91	»	»	» 2	» $\sqrt{(c^2-x^2)^2}$	» $\sqrt[3]{(c^2-x^2)^2}$
» 98	»	»	» 8	» $d\,\lg(a+bx)^n$	» $d\,\lg(a \pm bx)^n$
» 116	»	»	» 1	» $\frac{dx}{dy}$	» $\frac{dy}{dx}$
» 122	» oben		» 2	» $\frac{1}{k}$	» $\frac{k}{1}$
» 133	» unten		» 6	» d^2	» dy^2
» 141	» oben		» 15	» $2x^2y^3dy$	» $2xy^3dy$
» 152	» unten		» 4	» y^3	» y^2
» 160	» oben		» 11	» geschieht	» geschieht häufig
» 162	» unten		» 12	» $\frac{a - x}{\mathrm{Cot}\frac{\pi x}{2}}$	» $\frac{a - x}{\mathrm{Cot}\frac{\pi x}{2a}}$.



